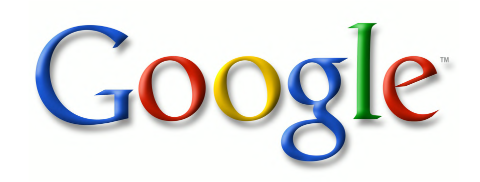




MÉMOIRES COURONNÉS

ET

MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS,

PUBLIÉS PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES DE BRUXELLES.

MÉMOIRES COURONNÉS

ET

MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS,

PUBLIÉS PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES DE BRUXELLES.

TOME XV. — 2me PARTIE. — 1841-1842.



BRUXELLES,

M. HAYEZ IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

1843.

MÉMOIRE

SUR

LES FONCTIONS ARBITRAIRES

EXPRIMÉES

PAR DES INTÉGRALES DOUBLES;

PAR

A. PIOCH,

PROFESSEUR D'ANALYSE A L'ÉCOLE MILITAIRE.

INTRODUCTION.

Ce mémoire a pour objet la représentation des fonctions arbitraires par des intégrales doubles, et spécialement, de faire connaître une méthode très-simple qui conduit directement à une formule remarquable dont Fourier a enrichi l'analyse, et à d'autres formules analogues. Cette formule de Fourier sert à exprimer toute fonction arbitraire d'une seule variable par une intégrale définie double, prise depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et qui ne renferme plus la variable que sous le signe *cosinus*, c'est-à-dire, si l'on représente par φx une telle fonction de la variable x, on aura, quel que soit x,

$$(1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \varphi x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \alpha \cos. p(x-\alpha)\, dp d\alpha.$$

La grande importance de cette formule de Fourier, c'est qu'elle est vraie, quelle que soit la nature de la fonction φx, lors même qu'elle n'est assujettie à aucune condition de continuité, pourvu toutefois qu'elle n'ait pas plusieurs valeurs pour chacune de celles attribuées à la variable indépendante x. Ainsi, avec cette formule, on peut représenter tous les lieux géométriques imaginables, quand même ils se-

raient formés par des arcs de courbes différents, ou par des lignes droites et des arcs de courbes; elle peut également représenter le contour d'un triangle ou d'un polygone, etc..., c'est ce que nous expliquerons plus clairement dans le cours de ce mémoire.

Plusieurs géomètres, après Fourier, ont démontré sa formule, mais, les raisonnements et les calculs qu'ils ont faits pour l'établir, sont si épineux, pour ceux qui ne sont pas rompus aux difficultés de l'analyse transcendante, que je me suis proposé de la trouver directement en partant des premières notions sur les intégrales définies.

Fourier, dans sa *Théorie de la chaleur,* et après lui Poisson, dans un ouvrage qui porte le même titre, sont parvenus à la formule (1) au moyen du développement des fonctions suivant les sinus et les cosinus d'arcs multiples; mais cette méthode me paraît avoir l'inconvénient de présupposer l'existence d'une série dont la forme et la convergence ne sont pas données *à priori.* Quant aux autres méthodes données par Poisson et Deflers [1], elles sont, d'après l'avis de Poisson lui-même, des vérifications et non des démonstrations de la formule (1).

M. Cauchy [2] est aussi parvenu à la formule de Fourier par une méthode qui lui est propre; mais sa démonstration, quoique indépendante des développements en séries, me paraît trop difficile pour entrer dans les éléments, attendu qu'elle est fondée sur une théorie très-abstraite des intégrales définies prises entre des limites imaginaires, et sur une espèce d'intégrales que M. Cauchy nomme singulières.

La méthode que j'ai suivie pour obtenir la même formule, fait comprendre comment elle représente une fonction arbitraire; elle explique à la fois sa signification et son usage dans l'analyse.

[1] Voyez le 18e et le 19e cahier du *Journal de l'école polytechnique*, et le *Bulletin de la société philomatique*, novembre 1819.

[2] *Exercices d'analyse*, tome II, page 114.

Après avoir rapporté la méthode mentionnée de Deflers, je fais voir qu'en suivant une marche inverse, on peut établir plus directement la formule de Fourier; mais ces transformations, quoique curieuses comme artifices de calcul, ne font pas comprendre comment cette formule est applicable; je démontre même qu'elles n'offrent que des vérifications incomplètes, attendu qu'elles ne font pas connaître ce que devient la formule (1), lorsque la variable devient égale aux limites des intégrales, et lorsqu'elle tombe hors de ces limites. C'est pour cela que, revenant sur des raisonnements antérieurs qui mettent en évidence sa signification et sa généralité, je l'applique à des exemples particuliers de lieux géométriques.

Une des applications les plus remarquables par son originalité, que j'ai faite des intégrales définies, est celle dans laquelle je me suis proposé de déterminer géométriquement et analytiquement un air de musique quelconque, en m'appuyant sur certains principes de musique et d'acoustique.

Généralisant la méthode qui m'a conduit à la formule de Fourier, j'établis une formule très-générale pour représenter les fonctions arbitraires d'une seule variable; formule qui comprend celle de Fourier et toutes celles trouvées par M. Cauchy, et une infinité d'autres analogues; puisque la fonction arbitraire est représentée par une intégrale double qui renferme la variable sous le signe d'une autre fonction très-générale.

Je démontre ensuite comment on peut, en partant de la formule (1), développer les fonctions arbitraires en séries de sinus et de cosinus d'arcs multiples, et retrouver ainsi, par une marche inverse et qui me paraît plus rationnelle, les différentes formules desquelles on avait déduit la formule même de Fourier et d'autres de la même espèce.

Enfin, je termine en démontrant que dans une intégrale double, l'ordre des intégrations n'est pas indifférent, lorsque les limites des

intégrales dépendent d'un paramètre variable que renferme la fonction différentielle.

En composant ce mémoire, j'ai eu pour but de rendre plus facile l'étude d'une partie de l'analyse transcendante, et de répandre des connaissances qui, jusqu'aujourd'hui, sont restées du domaine des savants.

MÉMOIRE

SUR

LES FONCTIONS ARBITRAIRES

EXPRIMÉES

PAR DES INTÉGRALES DOUBLES.

I.

Les fonctions ordinaires de l'analyse, qui ne comprennent dans leur définition que les opérations algébriques et les opérations transcendantes désignées par a^x, log. x, sin. x, arc (sin. $= x$), etc., ne sauraient embrasser tous les modes de génération des quantités, c'est-à-dire, toutes les lois de quantités, continues et discontinues, dont l'esprit conçoit l'existence *à priori*. Pour le démontrer, cherchons les propriétés communes ou le caractère général de ces fonctions que je nomme ordinaires, parce qu'elles ne renferment pas de signe d'intégration. Soit donc Fx une fonction ordinaire, l'équation $y = Fx$, sera celle d'une ligne courbe telle que, si l'abscisse x croît d'une manière

continue dans un certain intervalle, l'ordonnée Fx croîtra ou décroîtra suivant la loi de continuité; d'où il suit que pour deux abcisses infiniment voisines, les ordonnées correspondantes ne pourront différer d'une quantité finie, mais bien d'une quantité infiniment petite. De plus, si la fonction Fx éprouve une solution de continuité ou devient infinie pour la valeur particulière $x = a$, elle aura encore une valeur infiniment grande pour une abscisse immédiatement plus petite ou plus grande que a. D'après ces propriétés générales de la fonction Fx, il suit que l'équation $y =$ Fx ne pourra représenter un lieu géométrique qui serait formé par des parties d'arcs de courbes différents, placés les uns à la suite des autres, *fig.* 3. Pour ne citer que l'exemple le plus simple, il est visible que l'équation $y =$ Fx, ne pourra représenter la partie de ligne droite parallèle à l'axe des x, qui serait comprise entre deux ordonnées finies et déterminées. L'équation $y = h$, représente bien une ligne droite parallèle à l'axe des x et distante de cet axe de h unités de longueur, mais cette droite est infinie dans les deux sens; d'où il résulte que $y = h$, ne peut représenter uniquement la partie de cette droite qui serait comprise entre deux ordonnées correspondantes aux abscisses $x = a$ et $x = b$.

Je crois devoir faire remarquer, pour mieux expliquer le manque de généralité des fonctions ordinaires, que les solutions de continuité qu'elles éprouvent pour certaines valeurs de la variable indépendante, sont toutes de la même nature, et qu'il en existe d'une autre espèce qu'elles ne peuvent manifester, par suite de leur composition analytique.

D'après la définition du mot *continuité*, on dit qu'une fonction φx est continue pour des valeurs de x comprises entre certaines limites déterminées, si, quand la variable x croît d'une manière continue entre ces limites, la fonction φx croît et décroît insensiblement, c'est-à-dire, lorsque la différence de deux résultats consécutifs peut devenir moindre qu'aucune grandeur donnée. S'il n'en est pas ainsi, la fonction φx sera discontinue, ou éprouvera une solution de continuité pour certaine valeur de x, puisqu'alors la continuité des valeurs de φx est rompue.

Cette continuité sera rompue pour la valeur particulière $x = a$, si la différence $\varphi(a + \omega) - \varphi a$ ne s'évanouit pas avec ω; or, cette différence peut être finie ou infinie, déterminée ou indéterminée. Dans les traités d'analyse, on dit qu'une fonction φx éprouve une solution de continuité pour $x = a$, si pour cette valeur la fonction devient infinie, parce que, dans ce cas, la différence $\varphi(a + \omega) - \varphi a$ est une quantité indéterminée ou infinie. La fonction log. $(1 - x)$ est dans le premier cas, et la suivante $\frac{1}{1-x}$, dans le second; en effet, pour la première, on a

$$\log.(1 - x + \omega) - \log.(1 - x) = \log.\left(\frac{1 - x + \omega}{1 - x}\right).$$

Pour savoir ce que devient cette différence, lorsque x devient l'unité et que ω s'évanouit, posons $x = 1 + m\omega$; la différence ci-dessus deviendra log. $(m + 1)$; quantité entièrement indéterminée, puisque m est une quantité finie arbitraire. Pour la fraction $\frac{1}{1-x}$, on trouvera la différence $\frac{1}{m(m-1)\omega}$ qui devient infinie quand ω s'évanouit.

En général, la différence $\varphi(a + \omega) - \varphi a$ sera déterminée ou infinie suivant que l'expression $\omega\varphi'(a + m\omega)$ sera indéterminée ou infinie quand ω s'évanouit.

Ce mode de discontinuité résulte de la nature même des fonctions ordinaires qui n'éprouvent de solution de continuité qu'en devenant infinies. Mais l'esprit peut concevoir, et conçoit effectivement l'existence de fonctions pour lesquelles la différence $\varphi(a + \omega) - \varphi a$ est finie et déterminée, sans que pour cela, la fonction φx soit infinie pour $x = a$.

Les fonctions ordinaires ne peuvent manifester ce dernier mode de discontinuité; nous verrons plus loin que celles qui en sont susceptibles, peuvent être représentées par des intégrales définies à paramètres variables.

Il résulte clairement de ce qui précède, qu'on ne saurait représenter tous les lieux géométriques en nombre infini, que la pensée conçoit et réalise, au moyen des fonctions que l'on considère dans la géométrie analytique et dans le calcul différentiel, parce que la génération de ces



fonctions ne peut embrasser toutes les lois de nombres et de quantités.

Les fonctions dont la généralité n'a pas de limite, celles qui embrassent tous les modes de génération possibles, sont nommées fonctions arbitraires; pendant bien longtemps, les géomètres ne purent les représenter par des signes analytiques; c'est au célèbre Lagrange qu'on est redevable de cette importante découverte, qui a agrandi le domaine de l'analyse en faisant faire des progrès considérables dans l'intégration des équations différentielles partielles, et dans la théorie des intégrales définies desquelles dépendent les solutions des principaux problèmes physico-mathématiques.

Dans un mémoire sur la théorie du son et dans un autre sur différents problèmes de calcul intégral [1], Lagrange établit la formule

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad fx = \frac{2}{\pi}\int_{o}^{l} \Sigma_{1}^{\infty} \sin.\frac{i\pi x}{l}.\ \sin.\frac{i\pi \alpha}{l} f\alpha d\alpha,$$

qui exprime le développement d'une fonction quelconque suivant les sinus des arcs multiples, et qui subsiste pour toutes les valeurs de x entre o et l, lors même que la fonction fx n'est assujettie à aucune loi de continuité, pourvu qu'elle s'évanouisse pour $x = o$ et $x = l$.

Quelques années plus tard, dans un mémoire qui porte la date de 1777, mais qui ne fut imprimé qu'en 1793 dans les *Nova acta academiæ Petropolitanæ*, Euler donna la formule

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad Fx = \frac{1}{\pi}\int_{o}^{\pi} F\alpha d\alpha + \frac{2}{\pi}\Sigma_{1}^{\infty} \cos.\, ix \int_{o}^{\pi} \cos.\, i\alpha\, F\alpha d\alpha,$$

qui exprime le développement d'une fonction arbitraire suivant les cosinus des arcs multiples, et qui a lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre o et π.

Je dois cependant ajouter qu'antérieurement au mémoire d'Euler, mais postérieurement à celui de Lagrange, Daniel Bernouilli [2] avait

[1] Tome III des *Anciens mémoires de Turin*.

[2] *Mémoires de Pétersbourg*, année 1772.

trouvé des séries de la même espèce pour le développement de quelques fonctions rationnelles.

La formule (2), qui avait servi à Lagrange pour la solution du fameux problème des cordes vibrantes, ainsi que la formule d'Euler (3), paraissent être demeurées sans usage, jusqu'à ce que Fourier, reprenant le problème du développement des fonctions suivant les sinus et les cosinus d'arcs multiples, retrouva ces formules et d'autres de la même espèce, qui lui servirent à résoudre la question de la propagation de la chaleur dans les corps solides. Ces premières recherches de Fourier, qui datent de 1807, furent continuées dans une suite de mémoires adressés à l'académie des sciences de Paris. Mais c'est principalement dans son grand ouvrage sur la théorie de la chaleur, dans lequel il a réuni tous ses travaux antérieurs sur cette matière, qu'il faut lire cette savante analyse, où il démontre la belle formule qui porte son nom, et qui est d'une si grande utilité dans les applications aux sciences physiques. Ces recherches furent continuées par Poisson et Cauchy, qui donnèrent d'autres démonstrations de la formule de Fourier, et en firent des applications nouvelles.

II.

Pour obtenir la formule de Fourier, je vais d'abord chercher la suivante

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \int_0^\infty \frac{\sin. mx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

dans laquelle m est un nombre positif quelconque.

Prenant l'intégrale

$$\int e^{-ax}\, dx = c - \frac{e^{-ax}}{a},$$

entre les limites zéro et l'infini, on aura

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a};$$

multipliant les deux nombres par da, et intégrant entre les limites b et c, il viendra

$$\int_b^c da \int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \log.\ \frac{c}{b};$$

mais

$$\int_b^c da \int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \int_0^\infty dx \int_b^c e^{-ax}\, da = \int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x}\, dx,$$

d'où il suit

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x}\, dx = \log.\ \frac{c}{b}.$$

Posant $b = -m\sqrt{-1}$, $c = m\sqrt{-1}$, divisant les deux nombres par $2\sqrt{-1}$, et remarquant que

$$\frac{e^{mx\sqrt{-1}} - e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin.\ mx, \quad \text{et } \log.\ (-1) = \pi\sqrt{-1},$$

on trouve enfin

$$\int_0^\infty \frac{\sin.\ mx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire la formule (4) qu'on voulait obtenir.

Si l'on veut éviter les symboles imaginaires, on partira de l'intégrale

$$\int e^{-ax} \sin.\ mxdx = c - \frac{a \sin.\ mx + m \cos.\ mx}{a^2 + m^2}\, e^{-ax},$$

de laquelle on tire

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin.\ mxdx = \frac{m}{a^2 + m^2};$$

multipliant les deux nombres par da et intégrant entre les limites b et c, on trouvera

$$(5) \ldots \int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-bx}}{x} \sin.\ mxdx = \text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{b}{m}\right) - \text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{c}{m}\right);$$

posant $c=o$, $b=\infty$, il vient, comme ci-dessus

$$\int_o^\infty \frac{\sin. mx}{x}\, dx = \text{arc. } (\text{tang.} = \infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Il est remarquable que la valeur numérique de la constante m n'influe pas sur celle de cette intégrale définie, du moins tant que m demeure finie et positive et ne devient pas nulle. C'est ce que démontrent *à priori* les calculs qui précèdent; pour le faire voir *à posteriori*, posons $mx = nt$, où n désigne une quantité positive quelconque différente de m, et t la nouvelle variable; les limites de l'intégrale seront encore o et ∞, et l'on aura

$$\int_o^\infty \frac{\sin. mx}{x}\, dx = \int_o^\infty \frac{\sin. nt}{t}\, dt.$$

En changeant le signe de m, la valeur de l'intégrale définie (4) devient négative; en effet, à cause de $\sin. mx = - \sin. (-mx)$, il viendra

$$-\int_o^\infty \frac{\sin. (-mx)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{d'où} \int_o^\infty \frac{\sin. (-mx)}{x}\, dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Il suit de là, que l'intégrale définie (4) change de signe dans le passage de $m < o$ à $m > o$, et réciproquement; mais que devient-elle quand m est une quantité infiniment petite et s'évanouit? Pour répondre à cette question, considérons l'intégrale (4) comme étant la somme des valeurs en nombre infini de sa fonction différentielle, lorsqu'on y fait croître la variable x d'une manière continue entre les limites o et ∞; dans ce cas, et en supposant m infiniment petit et x fini, chaque terme de cette somme, à cause de $\sin. mx = mx$, sera un infiniment petit du second ordre; quand x devient infini, comme $\sin. mx$ ne peut surpasser l'unité, le terme correspondant sera moindre que $\frac{dx}{x}$, c'est-à-dire, sera encore un infiniment petit du second ordre : donc, dans l'hypothèse actuelle, la valeur de l'intégrale (4) sera une quantité infiniment petite et qui s'évanouira avec m.



On peut conclure de ce qui précède, que la valeur de l'intégrale (4) est égale à $\frac{\pi}{2}$ ou à $-\frac{\pi}{2}$, suivant que m est une quantité positive ou négative; ensuite, qu'elle est infiniment petite avec m, et devient nulle pour $m=o$.

Donc, si dans (4) on change x en p et m en $x-\alpha$, on aura

$$(6) \quad \ldots\ldots \int_o^\infty \frac{\sin. p(x-\alpha)}{p}\, dp = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{pour } x>\alpha, \\ -\frac{\pi}{2}, & \ldots\ x<\alpha, \\ 0, & \ldots\ x=\alpha. \end{cases}$$

C'est-à-dire, que si x diffère de α d'une quantité finie, positive ou négative, la valeur de l'intégrale (6) sera $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, et pour $x=\alpha$ elle sera nulle; mais, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, cette valeur sera infiniment petite avec $x-\alpha$; donc, si dans cette différence, on fait croître ou décroître x, à partir de $x=\alpha$, jusqu'à ce qu'elle devienne une quantité finie, la valeur de l'intégrale (6) demeurera toujours infiniment petite, en même temps que $x-\alpha$; mais sitôt que cette différence deviendra finie et aussi petite que l'on voudra, on aura $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$; d'où il suit que la valeur de l'intégrale (6) passe d'une quantité infiniment petite à l'une des quantités $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, sans passer par des valeurs finies intermédiaires [1]; ce qui montre que le lieu géométrique de l'équation

$$y=\int_o^\infty \frac{\sin. p(x-\alpha)}{p}\, dp, \quad (Fig.\ 1^{re}),$$

est représenté par les deux parallèles à l'axe des x, mn et $m'n'$, et par le point p situé sur cet axe.

III.

D'après la formule (6), la valeur de l'intégrale

$$(7) \quad \ldots\ldots \frac{1}{\pi}\int_o^\infty [\sin. p(x-a_n) - \sin. p(x-a_{n+1})]\,\frac{dp}{p},$$

dans laquelle a_{n+1} est plus grand que a_n, est nulle pour toutes les

[1] Voir la note 1re à la fin du mémoire.

valeurs de x plus petites que a_n ou plus grandes que a_{n+1}, et elle est égale à l'unité pour toutes celles qui sont comprises entre a_n et a_{n+1}, mais ne donne que $\frac{1}{2}$, pour $x = a_n$ et $x = a_{n+1}$; ce que met en évidence le tableau suivant :

$$(8)\ldots \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin.p(x-a_n)}{p}\,dp - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin.p(x-a_{n+1})}{p}\,dp = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=0, & \text{pour } x<a_n, \\ \frac{1}{\pi}\left[\ \frac{\pi}{2}-\left(+\frac{\pi}{2}\right)\right]=0, & \ldots\ x>a_{n+1}, \\ \frac{1}{\pi}\left[\ \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=1, & \ldots\ x>a_n \text{ et } <a_{n+1}, \\ \frac{1}{\pi}\left[\ 0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}, & \ldots\ x=a_n, \\ \frac{1}{\pi}\left[\ \frac{\pi}{2}-\left(+0\right)\right]=\frac{1}{2}, & \ldots\ x=a_{n+1}. \end{cases}$$

Si a_n et a_{n+1} sont des quantités négatives, ou si l'une est positive et l'autre négative, ces propriétés de l'intégrale (7) subsisteront encore, comme il est aisé de le vérifier, pourvu toutefois que la différence $a_{n+1} - a_n$ soit une quantité finie et différente de zéro. Si $a_{n+1} - a_n$ est une quantité infiniment petite, il sera encore vrai que la valeur de l'expression (7) sera nulle pour des valeurs de x plus petites que a_n et plus grandes que a_{n+1}; mais si x est compris entre a_n et a_{n+1}, les quantités $x - a_n$ et $x - a_{n+1}$ seront, dans ce cas, infiniment petites, la première positive et la seconde négative; il en sera de même des deux intégrales,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin.p(x-a_n)}{p}\,dp \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{\sin.p(x-a_{n+1})}{p}\,dp,$$

et par suite, de leur différence (8), qui sera encore infiniment petite pour $x = a_n$ et $x = a_{n+1}$, puisque alors, l'une des quantités $x - a_n$ et $x - a_{n+1}$, sera nulle et l'autre infiniment petite.

En supposant que la différence $a_{n+1} - a_n$ soit finie et différente de zéro, il résulte de ce qui précède, que l'expression

$$(9)\ \ldots\ldots\ y = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty b_n\left[\sin.p(x-a_n) - \sin.p(x-a_{n+1})\right]\frac{dp}{p},$$

est égale à b_n pour toute valeur de x comprise entre a_n et a_{n+1}, et égale à $\frac{1}{2}$ b_n pour $x = a_n$ et $x = a_{n+1}$; et enfin, nulle pour toute autre valeur de x, quels que soient les signes et la grandeur de a_n, a_{n+1}, et b_n. Si ces quantités sont positives, l'équation (9) a pour lieu géométrique la partie mn de parallèle à l'axe des x, représentée par la figure 2, ainsi que les parties indéfinies de cet axe qui se trouvent l'une à gauche du point p, et l'autre à droite du point q; ce lieu géométrique comprend aussi les points milieux des perpendiculaires mp et nq.

Il est facile de voir quel sera le lieu géométrique de la même équation, lorsque les quantités a_n, a_{n+1} et b_n offriront une autre combinaison de signes.

Désignons maintenant par a_n et b_n les termes généraux des deux suites indéfinies de quantités,

(10). . . . . $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots,\ a_n$, etc.,

(11). . . . . $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ldots,\ b_n$, etc.,

qui sont ou non régies par une loi de formation, mais dont la première est croissante, et faisons successivement dans l'expression (9), $n = 0, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots i$; ajoutons les seconds membres entre eux, on obtiendra la somme suivante :

$$(12). \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi}\int_0^\infty b_0 \left[\sin. p(x-a_0) - \sin. p(x-a_1)\right]\frac{dp}{p} \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty b_1 \left[\sin. p(x-a_1) - \sin. p(x-a_2)\right]\frac{dp}{p} \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty b_2 \left[\sin. p(x-a_2) - \sin. p(x-a_3)\right]\frac{dp}{p} \\ + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty b_n \left[\sin. p(x-a_n) - \sin. p(x-a_{n+1})\right]\frac{dp}{p} \\ + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty b_i \left[\sin. p(x-a_i) - \sin. p(x-a_{i+1})\right]\frac{dp}{p}; \end{array} \right.$$

D'après ce qui précède, il est visible que ce développement représente une fonction de x qui demeure égale à b_0 pour toute valeur de x comprise entre a_0 et a_1, qui est constamment égale à b_1 pour des valeurs de x comprises entre a_1 et a_2, et ainsi de suite; en général, cette fonction demeure égale à b_n pour toutes les valeurs de x qui sont comprises entre a_n et a_{n+1}. On observe ensuite que, si l'on fait successivement $x = a_0, a_1, a_2, \dots a_i$, on trouvera respectivement les valeurs suivantes :

$$\tfrac{1}{2} b_0, \quad \tfrac{1}{2}(b_0 + b_1), \quad \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2), \quad \dots\dots, \quad \tfrac{1}{2}(b_{i-1} + b_i), \quad \tfrac{1}{2} b_i.$$

Il suit de là, que la fonction de x dont il s'agit, peut être regardée comme l'ordonnée du lieu géométrique représenté par la figure 3; mais en attribuant à x les valeurs suivantes a_0, a_1, a_2, etc..., on trouvera que ce lieu géométrique comprend aussi les points milieu des perpendiculaires à l'axe des x, terminées aux extrémités de deux parallèles successives à cet axe. La somme désignée par (12) peut d'ailleurs être écrite en abrégé de la manière suivante :

$$(13) \quad \dots\dots \quad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Sigma_{a_0}^{a_i}\, b_n\,[\sin.p(x-a_n) - \sin.p(x-a_{n+1})]\,\frac{dp}{p},$$

où le signe $\Sigma_{a_0}^{a_i}$ représente la somme des termes qui résultent de la quantité entre crochets multipliée par b_n, lorsqu'on y fait successivement $n = 0, 1, 2, \dots n, \dots i$. On aura donc généralement

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Sigma_{a_0}^{a_i}\, b_n[\sin.p(x-a_n) - \sin.p(x-a_{n+1})]\,\frac{dp}{p} = \begin{cases} b_n, \;\dots\dots \text{ pour } x > a_n \text{ et } < a_{n+1} \\ \tfrac{1}{2}(b_{n-1} + b_n) \;\dots\; x = a_n, \\ \tfrac{1}{2}(b_n + b_{n+1}) \;\dots\; x = a_{n+1}\,; \end{cases}$$

mais à cause de la relation

$$(14) \dots\dots \quad \sin.p(x-a_n) - \sin.p(x-a_{n+1}) = 2\sin.\tfrac{1}{2}p(a_{n+1} - a_n).\cos.p[x - \tfrac{1}{2}(a_n + a_{n+1})],$$

il viendra

$$(15) \dots \quad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty 2\,\Sigma_{a_0}^{a_i}\, b_n \cos.p(x - a_n - \tfrac{1}{2}\Delta a_n).\sin.\tfrac{1}{2}p\,\Delta a_n.\,\frac{dp}{p} = \begin{cases} b_n, \;\dots\dots \text{ pour } x > a_n \text{ et } < a_{n+1} \\ \tfrac{1}{2}(b_{n-1} + b_n) \;\dots\; x = a_n, \\ \tfrac{1}{2}(b_n + b_{n+1}) \;\dots\; x = a_{n+1}, \end{cases}$$

où l'on a fait, pour abréger, $a_{n+1} - a_n = \Delta a_n$.

Examinons ce que devient cette formule lorsque les termes de la suite (10) sont les valeurs successives d'une quantité α qui croît suivant la loi de continuité, alors la différence Δa_n sera une quantité infiniment petite, ainsi que sin. $\frac{1}{2}\, p\Delta a_n$; de sorte que Δa_n se changera en $d\alpha$, et sin. $\frac{1}{2}\, p\Delta a_n$ en sin. $\frac{1}{2}\, pd\alpha$, ou plus simplement en $\frac{1}{2}\, pd\alpha$; et comme la loi de génération des quantités (11) est arbitraire, supposons qu'elles soient les valeurs successives d'une fonction quelconque $\psi\alpha$, quand on y fait croître α d'une manière continue depuis a_o jusqu'à a_i. Par ces conditions, les différents termes du développement (12) ou de l'expression

$$\Sigma_{a_o}^{a_i}\, 2\, b_n \cos.\, p\,(x - a_n - \tfrac{1}{2}\,\Delta a_n).\ \sin.\, \tfrac{1}{2}\, p\,\Delta a_n\,,$$

seront des quantités infiniment petites, et cette expression elle-même sera la somme des valeurs de la différentielle

$$\psi\alpha \cos.\, p\,(x - \alpha)\, d\alpha\,,$$

lorsqu'on y fait croître α d'une manière continue, depuis a_o jusqu'à a_i, c'est-à-dire, qu'elle aura pour valeur celle de l'intégrale définie

$$\int_{a_o}^{a_i} \psi\alpha.\ \cos.\, p\,(x - \alpha)\, d\alpha\,, \quad \text{ou} \int_{a_o}^{a_i} \psi\mu.\ \cos.\, p\,(x - \mu)\, d\mu\,;$$

par suite, le premier membre de la formule (15) deviendra

$$\frac{1}{\pi} \int_o^{\infty} dp \int_{a_o}^{a_i} \psi\mu \cos.\ p\,(x - \mu)\, d\mu\,;$$

mais la fonction $\psi\alpha$, qui remplace b_n, étant continue pour des valeurs de α depuis $\alpha = a_o$, jusqu'à $\alpha = a_i$, les trois quantités

$$b_n, \quad \tfrac{1}{2}\,(b_{n-1} + b_n), \quad \tfrac{1}{2}\,(b_n + b_{n+1}),$$

ne différeront pas de $\psi\alpha$, qui exprime la valeur actuelle du second membre de la formule (15); on aura donc

$$(16) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\pi} \int_o^{\infty} dp \int_{a_o}^{a_i} \psi\mu \cos.\, p\,(x - \mu)\, d\mu = \psi\alpha\,, \quad \text{pour } x = \alpha\,,$$

et pour des valeurs de x qui diffèrent de α d'une quantité infiniment petite; mais, dans cette hypothèse et à cause de la continuité de la fonction ψ entre les limites a_o et a_i, les deux fonctions $\psi\alpha$ et ψx seront identiques; donc, pour toutes les valeurs de x comprises entre ces limites, on aura

$$\psi x = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty dp \int_{a_o}^{a_i} \psi\mu . \cos . p(x-\mu)\, d\mu ,$$

ou bien en remplaçant μ par α

$$(17) \quad \ldots\ldots \quad \psi x = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{a_o}^{a_i} \psi\alpha . \cos . p(x-\alpha)\, dp d\alpha ,$$

en se rappelant que l'intégration, par rapport à p, a lieu entre les limites o et ∞, et celle par rapport à α, entre a_o et a_i; ensuite, que pour $x=a_o$ et $x=a_i$, les valeurs correspondantes du second membre doivent être doublées, et sont nulles quand x tombe hors des limites a_o et a_i.

Avec cette formule, on peut représenter une portion d'arc de courbe continue, c'est-à-dire, une partie de courbe qui serait comprise entre les parallèles représentées par les équations $x=a_o$ et $x=a_i$.

Si nous désignons par φx une fonction qui devient identique à ψx pour des valeurs de x depuis a_o jusqu'à a_i, à $\psi_1 x$ quand x est compris entre a_i et a_{i_1}, à $\psi_2 x$ quand x est compris entre a_{i_1} et a_{i_2}, etc..., à $\psi_m x$ pour des valeurs de x depuis $a_{i_{m-1}}$ jusqu'à a_{i_m}, on aura

$$(18) \quad \ldots\ldots \quad \varphi x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{a_o}^{a_i} \psi\alpha . \cos . p(x-\alpha)\, dp d\alpha \\ + \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{a_i}^{a_{i_1}} \psi_1\alpha . \cos . p(x-\alpha)\, dp d\alpha \\ + \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{a_{i_1}}^{a_{i_2}} \psi_2\alpha . \cos . p(x-\alpha)\, dp d\alpha \\ + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots \\ + \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{a_{i_{m-1}}}^{a_{i_m}} \psi_m\alpha . \cos . p(x-\alpha)\, dp d\alpha ; \end{array} \right.$$

or, si l'on remarque que le premier et le second terme deviennent $\frac{1}{2}\psi a_i$, $\frac{1}{2}\psi_1 a_i$, pour $x = a_i$, il suit que, pour cette valeur de x, on aura $\varphi a_i = \frac{1}{2}\psi a_i + \frac{1}{2}\psi_1 a_i$.

La même observation a lieu pour $x = a_{i_1}$, $x = a_{i_2}$, et ainsi de suite ; donc, si l'on a les conditions $\psi a_i = \psi_1 a_i$, $\psi_1 a_{i_1} = \psi_2 a_{i_1}$, $\psi_2 a_{i_2} = \psi_3 a_{i_2}$, etc..., l'égalité précédente pourra s'écrire comme suit :

$$(19) \quad \varphi x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{a_0}^{a_{i_m}} \varphi\alpha . \cos . p(x-\alpha)\, dp d\alpha \,;$$

formule qui subsiste pour toutes les valeurs de x comprises entre a_0 et a_{i_m}; mais il faudra doubler les résultats correspondants à $x = a_0$ et $x = a_{i_m}$, si toutefois la fonction φx ne s'évanouit pas à ces limites; auquel cas, cela ne sera plus nécessaire.

On voit *à posteriori* que le second membre de cette formule est une fonction de x ; en effet, l'intégration par rapport à α donne une fonction de x et de p, et l'intégration suivante, faisant disparaître p, il ne reste plus qu'une fonction de la variable x.

Comme a_0 et a_{i_m} sont des quantités arbitraires, on peut prendre $a_0 = 0$, $a_{i_m} = \infty$, ce qui donne la formule

$$(20) \quad \varphi x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi\alpha . \cos . p(x-\alpha)\, dp d\alpha ,$$

qui exprime une fonction de x telle que, si x est compris entre zéro et l'infini, la valeur de la fonction soit φx, et que, si x est négative, la valeur correspondante de la même fonction soit toujours nulle.

Si, au contraire, on veut une fonction de x qui subsiste pour des valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, il faudra prendre $a_0 = -\infty$ et $a_{i_m} = \infty$; ce qui donnera la formule suivante due à Fourier :

$$(21) \quad \varphi x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \varphi\alpha . \cos . p(x-\alpha)\, dp d\alpha \,;$$

l'intégration par rapport à p aura lieu entre o et ∞.

Cette formule comprend celle désignée par (20); car, il suffit, pour obtenir cette dernière, de remplacer $-\infty$ par 0 dans (21).

Si l'on écrit la formule (21) comme suit :

$$\varphi x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\alpha\, d\alpha \int_{0}^{\infty}\cos. p(x-\alpha)\, dp,$$

et si l'on observe que

$$(22) \quad \ldots\ldots \int_{0}^{\infty}\cos. p(x-\alpha)\, dp = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos. p(x-\alpha)\, dp,$$

il viendra :

$$(23) \quad \ldots\ldots \varphi x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\alpha.\cos. p(x-\alpha)\, dp d\alpha.$$

On aurait pu parvenir directement à la formule (23) au moyen de raisonnements analogues à ceux que l'on a faits pour obtenir la formule (21).

On peut se dispenser de faire la transformation trigonométrique (14) pour passer de la formule (15) à la formule (16). En effet, dans l'hypothèse que la différence Δa_n devient une quantité infiniment petite ou $d\alpha$, la suivante

$$\sin. p(x-a_n) - \sin. p(x-a_{n+1}), \text{ ou } -\Delta \sin. p(x-a_n),$$

devient la différentielle de $-\sin. p(x-\alpha)$ par rapport à α, c'est-à-dire,

$$p. \cos. p(x-\alpha)\, d\alpha;$$

donc, en supposant, comme ci-dessus, que b_n soit la valeur d'une fonction continue ψx pour la valeur particulière $x=\alpha$, l'expression

$$\Sigma_{a_0}^{a_i} b_n [\sin. p(x-a_n) - \sin. p(x-a_{n+1})],$$

ou bien

$$-\Sigma_{a_0}^{a_i} b_n \Delta \sin. p(x-a_n),$$

se changera dans l'intégrale définie

$$\int_{a_0}^{a_i} \psi\alpha . \cos . p(x-\alpha)\, d\alpha ,$$

et par suite, mettant cette valeur dans (15), on trouvera, comme plus haut (16),

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{a_0}^{a_i} \psi\alpha . \cos . p(x-\alpha)\, dp d\alpha = \psi\alpha , \text{ pour } x=\alpha .$$

IV.

On vérifiera la formule (21), si, en exécutant les intégrations indiquées dans le second membre, on trouve φx pour résultat.

Pour opérer cette vérification, posons

$$(24) \ldots\ldots\ldots \quad y=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\alpha . \cos . p(x-\alpha)\, dp d\alpha ;$$

exécutant d'abord l'intégration relative à p, entre les limites 0 et p, sauf à faire p infini dans l'intégration suivante, on aura

$$\int_0^{p} \cos . p(x-\alpha)\, dp = \frac{\sin . p(x-\alpha)}{x-\alpha} ,$$

et ensuite

$$y=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\alpha . \frac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}\, d\alpha ;$$

pour faire disparaître p qui est infini, faisons $\alpha - x = \frac{z}{p}$, il viendra

$$(25) \ldots\ldots\ldots \quad y=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x+\frac{z}{p}\right) . \frac{\sin . z}{z}\, dz ;$$

or, à cause de la valeur de p, la fonction $\varphi\ (x+\frac{z}{p})$ se réduit à φx,

excepté pour les valeurs de z qui sont elles-mêmes infinies, mais auxquelles on peut se dispenser d'avoir égard, parce que, dans ce cas, le facteur $\frac{\sin. z}{z}$, rend infiniment petite la valeur correspondante de l'intégrale. Ce qui donne enfin

$$y = \frac{1}{\pi} \varphi x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin. z}{z} dz = \varphi x.$$

Telle est la démonstration, ou plutôt la vérification que M. Deflers a donnée de la formule de Fourier.

On peut obtenir cette formule en suivant une marche inverse, c'est-à-dire, en partant directement de l'intégrale

(26) . . . . $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin. z}{z} dz = \pi;$$

en effet, si l'on multiplie les deux membres par la fonction arbitraire φx, on a identiquement

$$\varphi x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi x \frac{\sin. z}{z} dz.$$

Pour faire disparaître x sous le signe de la fonction φ, posons $z = k(\alpha - x)$, où k désigne une constante, et α la nouvelle variable indépendante, les limites de l'intégrale demeureront les mêmes, et l'on aura

$$\varphi x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left(\alpha - \frac{z}{k}\right) \frac{\sin. k(x - \alpha)}{x - \alpha} d\alpha;$$

mais, à cause de

(27). . . . . $$\frac{\sin. k(x - \alpha)}{x - \alpha} = \int_{0}^{k} \cos. p(x - \alpha)\, dp,$$

il viendra

$$\varphi x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left(\alpha - \frac{z}{k}\right) d\alpha \int_{0}^{k} \cos. p(x - \alpha)\, dp;$$

formule dans laquelle k est une quantité arbitraire; donc, si on le suppose infini, on obtiendra

$$\varphi x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \varphi \alpha \cos. p\,(x - \alpha)\, d\alpha\, dp.$$

Si, au lieu de multiplier les deux membres de l'identité (26) par φx, on les multiplie par $\varphi \alpha$, et qu'on pose comme ci-dessus $z = k\,(\alpha - x)$, on aura

$$\varphi \left(x + \frac{z}{k}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \alpha \frac{\sin. k\,(x - \alpha)}{x - \alpha}\, d\alpha,$$

et en vertu de la formule (27), il viendra

$$\varphi \left(x + \frac{z}{k}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{k} \varphi \alpha \cos. p\,(x - \alpha)\, d\alpha\, dp;$$

en supposant $k = \infty$, la fonction $\varphi(x + \frac{z}{k})$, se réduit à φx, et cette formule devient celle de Fourier.

Pour vérifier l'équation (21), M. Poisson la remplace par la suivante:

$$y = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kp} \varphi \alpha \cos. p\,(x - \alpha)\, dp\, d\alpha,$$

dans laquelle, k est une quantité positive qu'on égalera à zéro, après les intégrations. On a d'abord

$$\int_{0}^{\infty} e^{-kp} \cos. p\,(x - \alpha)\, dp = \frac{k}{k^2 + (x - \alpha)^2},$$

et ensuite

$$y = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \varphi \alpha}{k^2 + (x - \alpha)^2}\, d\alpha.$$

Si l'on suppose k infiniment petit, le coefficient de $d\alpha$ le sera aussi pour toutes les valeurs de α, excepté pour celles qui diffèrent infini-

ment peu de x; donc, en ne considérant que ces valeurs, et posant $x-\alpha=x'$, les nouvelles limites seront les quantités infiniment petites $-\omega$ et $+\omega$; ensuite, si l'on observe que $\varphi\alpha$ ne varie pas sensiblement entre ces limites, on aura

$$y=\frac{1}{\pi}\varphi x\int_{-\omega}^{\omega}\frac{kdx'}{k^2+x'^2}=\frac{2}{\pi}\varphi x.\ \text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\omega}{k}\right);$$

et, en posant $k=o$, il viendra

$$y=\frac{2}{\pi}\varphi x.\ \text{arc.}\,(\text{tang.}=\infty)=\varphi x.$$

V.

Les vérifications précédentes de la formule de Fourier sont incomplètes; d'abord, parce qu'elles ne font pas connaître si cette formule subsiste encore lorsqu'on attribue à la variable x les valeurs limites $-\infty$ et $+\infty$; ensuite, en supposant que les limites assignées soient finies, elles ne font pas voir que la fonction est nulle quand la valeur de x tombe hors de ces limites; ce que je vais expliquer.

Nous avons dit que la formule (20) exprime les valeurs d'une fonction φx pour des valeurs de x, depuis $x=o$ jusqu'à $x=\infty$; si l'on veut qu'elle exprime seulement les valeurs de la même fonction quand x est compris entre les limites β et β', et qu'elle soit nulle pour toutes les valeurs de x qui sont hors de ces limites, il faudra écrire

(28). . . . . $$y=\frac{1}{\pi}\int_{o}^{n}\int_{\beta}^{\beta'}\varphi\alpha\cos.p\,(x-\alpha)\,dp\,d\alpha;$$

où β est $<\beta'$, et n une quantité qu'on fera égale à l'infini, après les intégrations. Pour vérifier *à posteriori* cette formule, nous la mettrons sous la forme

$$y=\frac{1}{\pi}\int_{\beta}^{\beta'}\varphi\alpha\,d\alpha\int_{o}^{n}\cos.p\,(x-\alpha)\,dp.$$

Or, on a

$$\int_0^n \cos. p\,(x-\alpha)\,dp = \frac{\sin. n\,(x-\alpha)}{x-\alpha},$$

et ensuite

$$y = \frac{1}{\pi}\int_\beta^{\beta'} \varphi\alpha\,\frac{\sin. n\,(x-\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha;$$

posant $\alpha - x = \frac{z}{n}$, il viendra

$$(29) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{1}{\pi}\int_{n(\beta-x)}^{n(\beta'-x)} \varphi\left(x+\frac{z}{n}\right)\frac{\sin. z}{z}\,dz;$$

remplaçant n par l'infini, il viendra successivement :

1° pour $x > \beta$ et $< \beta'$,

$$y = \frac{1}{\pi}\varphi x\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin. z}{z}\,dz = \varphi x;$$

2° pour $x = \beta$,

$$y = \frac{1}{\pi}\varphi x\int_0^{\infty}\frac{\sin. z}{z}\,dz = \frac{1}{2}\varphi x;$$

3° pour $x = \beta'$,

$$y = \frac{1}{\pi}\varphi x\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin. z}{z}\,dz = \frac{1}{2}\varphi x.$$

Ces résultats font voir que la formule

$$(30) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_\beta^{\beta'} \varphi\alpha \cos. p\,(x-\alpha)\,dp\,d\alpha$$

subsiste pour des valeurs de x comprises entre β et β', et que pour $x=\beta$ et $x=\beta'$ les valeurs correspondantes doivent être doublées, à moins toutefois, que pour ces limites, la fonction φx ne devienne nulle.

4° Pour compléter cette vérification, supposons que x tombe hors

des limites β et β', dans ce cas, la formule (29) donnera pour $x = \beta - k$,

$$y = \frac{1}{\pi}\varphi x \int_{nk}^{n(\beta'-\beta+k)} \frac{\sin. z}{z} dz$$

et pour $x = \beta' + k$,

$$y = \frac{1}{\pi}\varphi x \int_{-n(\beta'-\beta+k)}^{-nk} \frac{\sin. z}{z} dz = \frac{1}{\pi}\varphi x \int_{nk}^{n(\beta'-\beta+k)} \frac{\sin. z}{z} dz;$$

mais, ces deux valeurs de y sont nulles; en effet, à cause de n infini, on a

$$\int_{o}^{n} \frac{\sin. z}{z} dz = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{o}^{nk} \frac{\sin. z}{z} dz = \frac{\pi}{2};$$

il faut donc que l'on ait

$$\int_{nk}^{n(\beta'-\beta+k)} \frac{\sin. z}{z} dz = o,$$

quel que soit le nombre fini k.

Par des raisonnements analogues aux précédents, on vérifiera que la formule

$$(31) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi x = \frac{1}{\pi} \int_{o}^{\infty}\int_{-\beta}^{\beta'} \varphi\alpha \cos. p(x-\alpha)\, dp\, d\alpha$$

représente la fonction φx pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\beta$ et $+\beta'$; qu'il faut doubler les valeurs correspondantes à $x = -\beta$ et à $x = +\beta'$, et que cette fonction est nulle, quand x tombe hors de ces limites.

Ces propriétés des formules (28) et (31) sont vraies, quelles que soient les valeurs de β et de β'; ainsi, elles subsistent encore quand on a pour la première $\beta = o$ et $\beta' = \infty$, et pour la seconde $\beta = -\infty$ et $\beta' = +\infty$.

Nous avons vu que ces propriétés se déduisent directement de la démonstration qui a donné les formules (20) et (21).

VI.

Afin de bien faire comprendre la généralité de la formule de Fourier et ses usages dans l'analyse, nous allons d'abord chercher sa signification géométrique ; ensuite, nous l'appliquerons à quelques exemples faciles.

Nous avons démontré dans le nº III, en supposant que a_0, a_1, a_2, etc., forment une suite de quantités croissantes régies ou non par une loi unique, que pour des valeurs de x comprises entre a_n et a_{n+1}, les valeurs correspondantes de

$$(32) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Sigma_{a_0}^{a_i}\, b_n \Delta \sin.\, p(a_n - x)$$

seront toutes égales à b_n, quel que soit l'indice n ; de sorte, que si x croît d'une manière continue depuis a_0 jusqu'à a_n, les valeurs correspondantes de y seront les ordonnées d'un lieu géométrique de la forme *fig.* 3, c'est-à-dire, une espèce d'escalier dont la hauteur et la longueur des marches peuvent varier pour chacune d'elles ; de manière, qu'une ou plusieurs de ces marches peuvent se trouver dans un quelconque des quatre cadrans, et même se confondre avec l'axe des x.

Ensuite, nous avons expliqué ce que devient l'équation (32) et son lieu géométrique, lorsque le second membre devient identique à celui de la formule (17).

Dans ce passage, on a supposé que les quantités a_0, a_1, a_2, etc., sont les valeurs successives d'une quantité α qui croît suivant la loi de continuité, et b_0, b_1, b_2, etc., les valeurs correspondantes d'une fonction $\psi\alpha$ qui demeure continue pour des valeurs de α, depuis $\alpha = a_0$ jusqu'à $\alpha = a_i$; d'où il suit, que l'équation

$$(33) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{a_0}^{a_i} \psi\alpha \cos.\, p\,(x - \alpha)\, dp\, d\alpha$$

représente une portion quelconque d'arc de courbe compris entre les deux parallèles désignées par les équations $x = a_0$, $x = a_i$.

Désignons maintenant par

$$y=\psi x,\quad y=\psi_1 x,\quad y=\psi_2 x,\quad \text{etc.}\ldots$$

les équations respectives de certaines courbes dont mn, $m'n'$, $m''n''$, etc., *fig.* 4, ne sont que des parties comprises entre des parallèles à l'axe des y, et proposons-nous de trouver l'équation qui représente à la fois tous ces arcs de courbes différents.

Si nous désignons par a_o et a_i les abscisses op et op', nous aurons, d'après (16), pour l'équation de l'arc mn

$$y=\frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{a_o}^{a_i}\psi\alpha\cos.p\,(x-\alpha)\,dp\,d\alpha,$$

parce que les ordonnées sont nulles depuis $x=o$, jusqu'à $x=a_o$, et depuis $x=a_i$, jusqu'à $x=\infty$. Ainsi, en faisant croître x depuis $x=a_o$, jusqu'à $x=a_i$, cette formule donnera les ordonnées correspondantes de la courbe mn, et ces ordonnées seront nulles pour des abscisses qui tombent hors de ces limites.

En nommant a_{i_1} l'abscisse op'', on trouvera, de la même manière, que l'équation

$$y=\frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{a_i}^{a_{i_1}}\psi_1\alpha.\cos.p\,(x-\alpha)\,dp\,d\alpha$$

sera celle de l'arc $m'n'$, et ainsi de suite. De sorte que si l'on désigne par a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}, etc., les abscisses op''', op^{IV}, op^{V}, etc., on aura, pour l'équation du lieu géométrique représenté par la *fig.* 3 :

$$(34)\ldots\ldots\quad y=\frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{a_o}^{a_i}\psi\alpha\cos.p\,(x-\alpha)\,dp\,d\alpha$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{a_i}^{a_{i_1}}\psi_1\alpha\cos.p\,(x-\alpha)\,dp\,d\alpha$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{a_{i_1}}^{a_{i_2}}\psi_2\alpha\cos.p\,(x-\alpha)\,dp\,d\alpha$$
$$+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots$$

Dans cette formule, quelques-unes des fonctions $\psi\alpha$, $\psi_1\alpha$, $\psi_2\alpha$, etc., peuvent être nulles; cela arrivera lorsque la partie correspondante du lieu géométrique se confondra avec l'axe des x.

Si, pour abréger, nous représentons par φx une fonction qui devient respectivement identique à ψx, $\psi_1 x$, $\psi_2 x$, etc., lorsque x est compris entre les limites a_o, a_i; a_i, a_{i_1}; a_{i_1}, a_{i_2}, etc., la formule (34) devient

$$y = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{a_0}^{a_{i_m}} \varphi\alpha \cos. p\,(x-\alpha)\,dp\,d\alpha.$$

Ce qui montre que cette équation, qui n'est autre que celle de Fourier, représente un lieu géométrique quelconque; elle peut, entre deux abscisses données, exprimer un certain arc de courbe, entre deux autres abscisses, un arc de courbe différent, ou une ligne droite, qui peut même se confondre avec l'axe des x, et ainsi de suite.

Cependant, cette formule ne représente rigoureusement une série d'arcs différents, placés les uns à la suite des autres, qu'autant que les extrémités voisines de deux arcs sont contiguës, comme dans la *fig.* 5. Si ces arcs sont placés comme dans le *fig.* 4, cette formule n'aura pas lieu pour les abscisses op, op', op'', etc.; en effet, pour ces valeurs l'équation précédente ne donne pas les ordonnées correspondantes du lieu géométrique, mais la demi-somme de ces ordonnées; ce qui fournit une série de points qui n'appartiennent pas à la suite d'arcs que l'on considère. Cette remarque sur l'application de la formule de Fourier, et qui résulte immédiatement de la démonstration que j'en ai donnée dans le nº 3, ne me paraît pas avoir été faite, du moins je ne l'ai vue mentionnée dans aucun livre.

Ce qui précède montre comment on trouverait l'équation d'un lieu géométrique qui serait entièrement situé du côté des x négatifs, et de celui qui serait situé à la fois dans les deux sens de l'axe des x.

L'équation (34) peut aussi se déduire directement de la formule (32); en effet, supposons que a_m, a_{m_1}, a_{m_2}, etc., soient des abscisses écrites dans leur ordre de grandeur, et comprises entre a_o et a_n; désignons par

b_m, b_{m_1}, b_{m_2}, etc., les ordonnées correspondantes; l'équation du lieu géométrique représenté par la formule (32), pourra s'écrire ainsi :

$$y = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty \Sigma_{a_o}^{a_m} b_m \, \Delta \sin. p\left(a_m - x\right)$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_o^\infty \Sigma_{a_m}^{a_{m_1}} b_{m_1} \, \Delta \sin. p\left(a_{m_1} - x\right)$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_o^\infty \Sigma_{a_{m_1}}^{a_{m_2}} b_{m_2} \, \Delta \sin. p\left(a_{m_2} - x\right)$$

$$+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si dans ce développement, nous supposons que les quantités a_0, a_1, a_2, etc., soient les valeurs successives d'une quantité α qui croît suivant la loi de continuité; ensuite, que $b_0, b_1, \ldots, b_m$; $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_{m_1}$; b_{m_1+1}, $b_{m_1+2}, \ldots, b_{m_2}$; etc., soient respectivement les valeurs correspondantes de $\varphi_1\alpha$, $\varphi_2\alpha$, $\varphi_3\alpha$, etc..., pour les valeurs de α, depuis $\alpha = b_0$, jusqu'à $\alpha = b_m$; depuis $\alpha = b_m$, jusqu'à $\alpha = b_{m_1}$, etc...., le tableau précédent deviendra identique à celui désigné sous la marque (34), en supposant toutefois que l'on ait $m = i$, $m_1 = i_1$, $m_2 = i_2$, etc.

Lorsque la fonction que l'on cherche est paire ou impaire, la formule de Fourier (23) se décompose en deux autres qui se rapportent à chacun de ces cas particuliers; en effet, si dans cette formule, on développe cos. $p\,(x - \alpha)$, elle deviendra

$$\varphi x = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{-\infty}^\infty \varphi\alpha \cos. px \; \cos. p\alpha\, dp d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{-\infty}^\infty \varphi\alpha \sin. px \sin. p\alpha\, dp d\alpha\,;$$

cela posé, remplaçons φx par la fonction paire $\mathrm{F}x = \mathrm{F}\,(-x)$, puis par la fonction impaire $fx = -f\,(-x)$; observons ensuite que l'on a

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{F}\alpha \sin. p\alpha\, d\alpha = o\,, \quad \int_{-\infty}^\infty f\alpha \cos. p\alpha\, d\alpha = o\,,$$

parce que la fonction différentielle est le produit de deux facteurs dont un seul change de signe avec α, et que par suite, chaque intégrale



considérée comme étant la somme des valeurs infiniment petites de sa différentielle, est composée d'éléments qui se détruisent deux à deux. Par ces observations, on aura les deux formules

$$Fx = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{-\infty}^\infty F\alpha \cos. px \cos. p\alpha\, dp d\alpha,$$

$$fx = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{-\infty}^\infty f\alpha \sin. px \sin. p\alpha\, dp d\alpha,$$

que l'on peut encore écrire de la manière suivante :

(35) . . . . $$Fx = \frac{2}{\pi}\int_o^\infty \cos. px\, dp \int_o^\infty F\alpha \cos. p\alpha\, d\alpha,$$

(36) . . . . $$fx = \frac{2}{\pi}\int_o^\infty \sin. px\, dp \int_o^\infty f\alpha \sin. p\alpha\, d\alpha.$$

On peut vérifier ces deux formules immédiatement ; en effet, si l'on remarque que

$$2 \cos. px \cos. p\alpha = \cos. p(x-\alpha) + \cos. p(x+\alpha),$$
$$2 \sin. px \sin. p\alpha = \cos. p(x-\alpha) - \cos. p(x+\alpha)$$

elles deviendront

$$Fx = \frac{1}{2\pi}\int_o^\infty\int_{-\infty}^\infty F\alpha \cos. p(x-\alpha)\, dp d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_o^\infty\int_{-\infty}^\infty F\alpha \cos. p(x+\alpha)\, dp d\alpha,$$

$$fx = \frac{1}{2\pi}\int_o^\infty\int_{-\infty}^\infty f\alpha \cos. p(x-\alpha)\, dp d\alpha - \frac{1}{2\pi}\int_o^\infty\int_{-\infty}^\infty f\alpha \cos. p(x+\alpha)\, dp d\alpha,$$

et, d'après la formule (31), on aura les deux équations

$$Fx = \frac{Fx}{2} + \frac{F(-x)}{2},$$

$$fx = \frac{fx}{2} - \frac{f(-x)}{2},$$

dont les seconds membres sont identiques aux premiers.

Si la fonction φx que l'on cherche est paire, la courbe représentée par l'équation $y=\varphi x$, sera située au-dessus ou au-dessous de l'axe des x, et divisée en deux parties symétriques par l'axe des y; par conséquent, à cause de la nature de la fonction φx, il suffira de déterminer analytiquement la partie située à droite de cet axe, pour avoir l'équation de la courbe entière. Si au contraire, la fonction φx est impaire, la courbe se trouvera dans deux cadrans opposés, et sera encore divisée en deux parties par l'axe des y; il suffira de chercher l'équation de la partie qui se trouve du côté des x positifs. Dans le premier cas, celui où la fonction est paire, il faudra employer la formule (35); dans le second, on fera usage de la formule (36).

Les formules (33) et (34) représentent des lieux géométriques qui sont situés dans les deux régions de l'axe des x; si l'on ne veut considérer que des courbes qui sont situées du côté des x positifs, il ne sera plus nécessaire que la fonction cherchée soit paire ou impaire, ce que je vais démontrer.

Supposons d'abord que les lieux géométriques dont il s'agit soient compris entre les limites $x=-l$ et $x=+l$; alors les équations (35) et (36) deviendront

$$(37) \quad \ldots\ldots\ldots \quad Fx=\frac{2}{\pi}\int_o^\infty\int_o^l F\alpha \cos. px \cos. p\alpha \, dp d\alpha,$$

$$(38) \quad \ldots\ldots\ldots \quad fx=\frac{2}{\pi}\int_o^\infty\int_o^l f\alpha \sin. px \sin. p\alpha \, dp d\alpha,$$

On peut vérifier que les fonctions Fx et fx seront nulles quand la valeur de x sera hors des limites $-l$ et $+l$; mais, si l'on considère séparément les parties comprises entre 0 et l, il est visible que la première formule subsistera pour $x=o$, tandis qu'à cette limite; la fonction fx devra s'évanouir. Cela posé, transportons l'origine au point dont l'abscisse est $x=-l$; il suffira de changer, dans ces formules, x en $x-l$, α en $\alpha-l$, et l en $2l$, ensuite $F(x-l)$ et $f(x-l)$ en

F_1x et f_1x; on obtiendra les équations :

$$(39) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad F_1x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2l} F_1\alpha \cos. p\,(x-l) \cos. p\,(\alpha-l)\, dp d\alpha,$$

$$(40) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad f_1x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2l} f_1\alpha \sin. p\,(x-l) \sin. p\,(\alpha-l)\, dp d\alpha,$$

qui sont celles du lieu géométrique proposé rapporté aux nouveaux axes.

Les fonctions F_1x et f_1x ne sont plus des fonctions paires et impaires, mais quelconques.

VII.

Nous allons appliquer ces théories à quelques exemples particuliers de lieux géométriques déjà considérés par Fourier, et pour lesquels ce grand analyste n'a pas employé sa formule, mais des développements en séries de sinus et de cosinus d'arcs multiples. On observe que ces séries ne mettent pas en évidence, aussi bien que les intégrales définies, les propriétés de ces lieux géométriques; ce dont on peut s'assurer en comparant nos résultats à ceux obtenus par Fourier.

1° *Trouver une fonction qui demeure égale à* b, *pour des valeurs de* x *entre* o *et* m, *et qui est constamment égale à* — b, *quand* x *est compris entre les limites* o *et* — m.

La fonction que l'on cherche étant impaire, il faut faire usage de la formule (36), laquelle deviendra, par le cas actuel,

$$y = \frac{2b}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{m} \sin. px \sin. p\alpha\, dp d\alpha.$$

Pour vérifier que cette équation exprime la fonction cherchée, donnons-lui une autre forme; remarquons à cet effet, que

$$\int_0^{m} \sin. p\alpha d\alpha = \frac{1 - \cos. pm}{p};$$

donc on aura

$$y = \frac{2b}{\pi}\int_o^\infty \frac{\sin. px}{p}\,dp - \frac{b}{\pi}\int_o^\infty 2\,\frac{\sin. px \cos. pm}{p}\,dp\,;$$

mais à cause de

$$2 \sin. px \cos. pm = \sin. p\,(m+x) - \sin. p\,(m-x)\,,$$

il viendra l'équation

$$(41)\quad y = \frac{2b}{\pi}\int_o^\infty \frac{\sin. px}{p}\,dp - \frac{b}{\pi}\int_o^\infty \frac{\sin. p\,(m+x)}{p}\,dp + \frac{b}{\pi}\int_o^\infty \frac{\sin. p\,(m-x)}{p}\,dp\,,$$

qui montre visiblement que la valeur de y est égale à $-b$ pour des valeurs de x comprises entre o et $-m$, et égale à $+b$ pour des valeurs comprises entre o et m, et nulle pour des valeurs de x qui sortent des limites $-m$ et $+m$.

Si dans la formule (37), on change x en $x-m$, on aura l'équation

$$y = \frac{2b}{\pi}\int_o^\infty \frac{\sin. p\,(x-m)}{p}\,dp - \frac{b}{\pi}\int_o^\infty \frac{\sin. px}{p}\,dp + \frac{b}{\pi}\int_o^\infty \frac{\sin. p\,(2m-x)}{p}\,dp$$

qui sera encore celle du même lieu géométrique; mais, dont l'origine est transportée du côté des x négatifs à m unités de distance; ce que l'on peut d'ailleurs vérifier.

Dans la position actuelle de l'axe des y, aucune des formules (35) et (36) ne pourrait servir à trouver directement la dernière équation; cependant, si l'on ne voulait pas passer par la transformation précédente, il faudrait employer la formule (34) ou (40), et on arriverait au même résultat.

2° *Déterminer la fonction qui est égale à* x *entre les limites* x = — m *et* x = m.

Comme cette fonction est impaire, on prendra encore la formule (36), qui deviendra dans ce cas

$$y = \frac{2}{\pi}\int_o^\infty\!\!\int_o^m \alpha \sin. px \sin. p\alpha\, dp d\alpha\,;$$

intégrons d'abord par rapport à α, on aura

$$\int_o^m \alpha \sin. p\alpha\, d\alpha = -\frac{m \cos. pm}{p} + \frac{\sin. pm}{p^2},$$

et ensuite

$$y = -\frac{2m}{\pi}\int_o^\infty \frac{\sin. px \cos. pm}{p} dp + \frac{2}{\pi}\int_o^\infty \frac{\sin. px \sin. pm}{p^2} dp,$$

ou encore

$$y = -\frac{m}{\pi}\int_o^\infty \frac{\sin. p\,(m+x)}{p} dp + \frac{m}{\pi}\int_o^\infty \frac{\sin. p\,(m-x)}{p} dp$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_o^\infty \frac{\cos. p\,(x-m)}{p^2} dp - \frac{1}{\pi}\int_o^\infty \frac{\cos. p\,(x+m)}{p^2} dp;$$

mais on a, en intégrant par parties,

$$\int_r^\infty \frac{\cos. p\,(x-m)}{p^2} dp = \frac{\cos. r\,(x-m)}{r} - (x-m)\int_r^\infty \frac{\sin. p\,(x-m)}{p^2} dp$$
$$\int_r^\infty \frac{\cos. p\,(x+m)}{p^2} dp = \frac{\cos. r\,(x+m)}{r} - (x+m)\int_r^\infty \frac{\sin. p\,(x+m)}{p} dp;$$

posant $r=o$, et remarquant que, pour cette valeur, la différence

$$\frac{\cos. r\,(x-m)}{r} - \frac{\cos. r\,(x+m)}{r}$$

est nulle, la valeur de y deviendra

$$y = \frac{x}{\pi}\int_o^\infty \frac{\sin. p\,(m-x)}{p} dp + \frac{x}{\pi}\int_o^\infty \frac{\sin. p\,(m+x)}{p} dp;$$

équation qui fait voir immédiatement que si l'abscisse x est comprise entre $-m$ et $+m$, l'ordonnée correspondante sera égale à x, et que, pour des abscisses qui tombent hors de cet intervalle, les ordonnées seront nulles.

3° *Chercher l'équation du contour du trapèze isocèle ABCD,* fig. 5, *dans lequel on a*

$$OA = OB = \pi, \quad PB = PC = m, \quad OP = OP' = \pi - m.$$

L'équation de la droite *AB* est $y = \pi - x$, et comme la fonction cherchée est paire, il faudra prendre la formule (34). On trouvera pour le lieu géométrique du contour du trapèze *ABCD*, l'équation

$$y = \frac{2m}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{\pi-m} \cos. px \cos. p\alpha \, dp d\alpha$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_{\pi-m}^{\pi} (\pi - \alpha) \cos. px \cos. p\alpha \, dp d\alpha.$$

Si l'on intègre par rapport à α, et que l'on fasse des transformations analogues aux précédentes, on trouvera la formule

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{\pi} \left[\int_0^\infty \frac{\sin. p(x+\pi-m)}{p} dp - \int_0^\infty \frac{\sin. p(x-\pi+m)}{p} dp \right] \\ + \frac{\pi - x}{\pi} \left[\int_0^\infty \frac{\sin. p(x-\pi)}{p} dp - \int_0^\infty \frac{\sin. p(x-\pi+m)}{p} dp \right] \\ - \frac{\pi + x}{\pi} \left[\int_0^\infty \frac{\sin. p(x+\pi)}{p} dp - \int_0^\infty \frac{\sin. p(x+\pi-m)}{p} dp \right], \end{array} \right.$$

qui met en évidence le lieu géométrique représenté par le contour du trapèze isocèle *ABCD*.

Si dans la formule précédente, on change x en $x - \pi$, on transportera l'origine au point *A*, et la nouvelle équation sera celle du trapèze rapporté aux nouveaux axes.

4° Si au moyen de la formule (33), on cherche une fonction qui équivaille à e^{-x}, lorsque x est positif, et à e^{x}, lorsque x est négatif, on trouvera

$$y = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos. px}{1+p^2} dp.$$

Si on veut que la fonction cherchée soit égale à e^{-x} quand x est positif, et à $-e^{x}$, quand x est négatif, on fera usage de la formule (34), et l'on obtiendra

$$y=\frac{2}{\pi}\int_{o}^{\infty}\frac{p\,\sin.\,px}{1+p^2}\,dp.$$

En cherchant directement les valeurs de ces intégrales définies, on verra qu'elles satisfont aux conditions énoncées (*voyez* les Traités de calcul intégral).

Si l'on cherche la fonction qui est égale à sin. x pour des valeurs de x comprises entre o et m, et qui est nulle quand x tombe hors de ces limites, on trouvera

$$y=\frac{2}{\pi}\int_{o}^{\infty}\frac{\sin.\,px\,\sin.\,pm}{1-p^2}\,dp.$$

Les questions que nous venons de résoudre par la formule de Fourier sont des plus simples; je les ai rapportées afin de donner un exercice facile à ceux qui n'ont pas encore étudié cette partie de l'analyse transcendante; mais c'est principalement dans l'intégration des équations différentielles partielles que cette formule manifeste son utilité. Ceux qui voudront connaître ces applications devront étudier les ouvrages déjà cités de Fourier et de Poisson, sur la théorie de la chaleur, ainsi que les 18e et 19e cahiers du *Journal de l'école polytechnique*, les *Exercices d'analyse* de M. Cauchy et les Traités de calcul différentiel et intégral par MM. Duhamel et Cournot.

Je terminerai ces applications en rapportant, dans le numéro suivant, la construction et l'équation du lieu géométrique d'un air de musique quelconque.

VIII.

En partant de ce principe de musique que toute note demeure au même ton pendant tout le temps de sa durée, et que les tons, d'après



la théorie de l'acoustique, correspondent à certains nombres de vibrations sonores pendant des temps égaux, je me suis proposé le problème suivant :

*Trouver l'équation du lieu géométrique dont les abscisses représentent les temps musicaux écoulés depuis le commencement de l'air que l'on veut exécuter, et dont les ordonnées sont les tons correspondants des notes; en supposant que l'on prenne pour unité de temps celui de la mesure, et pour unité de ton l'*ut *bas de l'instrument; ensuite, que la gamme soit divisée en douze semi-tons moyens dont les valeurs numériques se trouvent dans le tableau suivant*[1] :

VALEURS NUMÉRIQUES DES DOUZE SEMI-TONS DE LA GAMME.	
PREMIÈRE OCTAVE.	DEUXIÈME OCTAVE, ETC.
$ut_1 = 2^{\frac{0}{12}} = 1.000000$	$ut_2 = 2^{\frac{12}{12}} = 2.000000$
ut_1 ♯ ou $ré_1$ ♭ $= 2^{\frac{1}{12}} = 1.059463$	ut_2 ♯ ou $ré_2$ ♭ $= 2^{\frac{13}{12}} = 2.118926$
$ré_1 = 2^{\frac{2}{12}} = 1.122462$	$ré_2 = 2^{\frac{14}{12}} = 2.244924$
$ré_1$ ♯ ou mi ♭ $= 2^{\frac{3}{12}} = 1.189207$	$ré_2$ ♯ ou mi_2 ♭ $= 2^{\frac{15}{12}} = 2.378414$
$mi_1 = 2^{\frac{4}{12}} = 1.259921$	$mi_2 = 2^{\frac{16}{12}} = 2.519842$
$fa_1 = 2^{\frac{5}{12}} = 1.334840$	$fa_2 = 2^{\frac{17}{12}} = 2.669680$
fa_1 ♯ ou sol_1 ♭ $= 2^{\frac{6}{12}} = 1.414213$	fa_2 ♯ ou sol_2 ♭ $= 2^{\frac{18}{12}} = 2.828426$
$sol_1 = 2^{\frac{7}{12}} = 1.498306$	$sol_2 = 2^{\frac{19}{12}} = 2.996612$
sol_1 ♯ ou la_1 ♭ $= 2^{\frac{8}{12}} = 1.587400$	sol_2 ♯ ou la_2 ♭ $= 2^{\frac{20}{12}} = 3.174800$
$la_1 = 2^{\frac{9}{12}} = 1.681793$	$la_2 = 2^{\frac{21}{12}} = 3.363596$
la_1 ♯ ou si_1 ♭ $= 2^{\frac{10}{12}} = 1.781719$	la_2 ♯ ou si_2 ♭ $= 2^{\frac{22}{12}} = 3.563592$
$si_1 = 2^{\frac{11}{12}} = 1.887745$	$si_2 = 2^{\frac{23}{12}} = 3.775490$
$ut_2 = 2^{\frac{12}{12}} = 2.000000$	$ut_3 = 2^{\frac{24}{12}} = 4.000000$

Considérons d'abord la question sous le point de vue général, et désignons par b_0, b_1, b_2, etc,... les valeurs numériques des tons, ou

[1] *Voyez* la *Physique* de Biot, tom. I, pag. 381.

leurs nombres de vibrations correspondantes, pour un air donné, en les supposant écrites dans leur ordre de succession dans l'air; représentons par a_0, a_1, a_2, etc., les temps musicaux correspondants, écoulés depuis le commencement de la première mesure et la fin de la note que l'on considère; on pourra prendre a_0, a_1, a_2, etc., pour les abscisses, et b_0, b_1, b_2, etc., pour les ordonnées du lieu des notes. Imaginons maintenant deux axes rectangulaires OX et OY, *fig.* 3, et supposons que l'on porte sur l'axe des x, à partir de l'origine, les temps musicaux a_0, a_1, a_2, etc., évalués en lignes, et qu'à l'extrémité de chacune de ces abscisses on élève des perpendiculaires respectivement égales aux nombres, b_0, b_1, b_2, etc., aussi mesurées en lignes; ensuite, que par l'extrémité de ces ordonnées, on mène des parallèles à l'axe des x et terminées à l'ordonnée suivante, prolongée s'il est nécessaire, on formera ainsi une espèce d'escalier qui monte et descend, et qui sera le lieu géométrique de l'air musical donné. Ce lieu est représenté par la *fig.* 3.., dont la formule

$$y = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Sigma_{a_0}^{a_n} b_n \left[\sin . p(x - a_n) - \sin . p(x - a_{n+1})\right] \frac{dp}{p}$$

est évidemment la traduction analytique, puisqu'elle exprime l'ordonnée constante b_0 de la première note pour toutes les valeurs de x comprises entre a_0 et a_1; la seconde b_1, pour toutes les valeurs de x depuis a_1 jusqu'à a_2, et ainsi de suite; cependant, lorsque x sera égale à une des quantités a_0, a_1, a_2, etc..., l'ordonnée correspondante sera la moyenne entre celle qui la précède et celle qui la suit; mais cette circonstance ne modifie pas l'image du lieu géométrique.

Je vais appliquer ces considérations générales aux cas particuliers les plus simples :

1° Prenons d'abord la suite des *ut* dans les octaves successives; dans ce cas, les abscisses formeront une progression par différence, les ordonnées correspondantes, une progression par quotient dont la raison est 2; l'unité de longueur est d'ailleurs arbitraire. La construc-

tion du lieu géométrique est trop facile à concevoir et à construire pour m'y arrêter; l'équation correspondante est

$$y = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty \Sigma_1^\infty 2^{n-1}\left[\sin.p(x-n+1) - \sin.(x-n)\right]\frac{dp}{p}.$$

2° Pour la gamme chromatique, les abscisses formeront encore une progression par différence, et les ordonnées une progression par quotient, dont la raison est $\sqrt[12]{2}$, base des logarithmes acoustiques. On trouvera aisément que l'équation de cette gamme, considérée comme lieu géométrique, est

$$y = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty \Sigma_1^\infty \sqrt[12]{2^{n-1}}\left[\sin.p(x-n+1) - \sin.p(x-n)\right]\frac{dp}{p}.$$

3° La *fig.* 6 représente l'air *God save the king* et son lieu géométrique correspondant. Pour les abscisses, on a les rapports suivants :

mesure $= 1$, 𝅗𝅥 $= \frac{2}{3}$, ♩ $= \frac{1}{3}$, ♩. $= \frac{1}{2}$, ♪ $= \frac{1}{6}$;

et afin de simplifier la figure et les calculs, l'échelle des ordonnées a été réduite de moitié, et l'on a pris les valeurs approximatives

$$si_{-1} = \tfrac{15}{16},\quad ut = 1,\quad re = \tfrac{9}{8},\quad mi = \tfrac{5}{4},\quad fa = \tfrac{4}{3},\ \text{etc.....}$$

ce qui donne pour les six premières mesures, la formule assez longue

$$y = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty \frac{dp}{p}\left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{16}\left[\sin.p(x-\tfrac{2}{3}) - \sin.p(x-1) - \sin.p(x-\tfrac{14}{3}) + \sin.p(x-5)\right]\\ &+\tfrac{1}{8}\left[\sin.p(x-\tfrac{5}{3}) - \sin.p(x-\tfrac{11}{3}) + \sin.p(x-\tfrac{13}{3}) + \sin.p(x-4)\right]\\ &+\tfrac{1}{8}\left[\sin.p(x-2) - \sin.p(x-\tfrac{7}{2})\right] + \tfrac{1}{12}\left[\sin.p(x-\tfrac{8}{3}) - \sin.p(x-3)\right]\\ &+\sin.px - \sin.p(x-\tfrac{17}{3}). \end{aligned}\right.$$

J'ajouterai, en terminant ces applications, que je ne prétends pas changer la méthode ordinaire d'écrire la musique; sans doute, la succession des abscisses et des ordonnées indiquées par la *fig.* 6, donne une idée frappante de la manière dont les tons se succèdent; mais la construction de cet escalier musical, dont les marches devraient tou-



jours être accompagnées de leur grandeur et de leur élévation données en nombres, sera toujours moins simple que l'écriture musicale ordinaire; cependant, je pense que cette représentation géométrique pourrait aider la mémoire et faciliter le travail de ceux qui commencent l'étude de la musique; car dans l'écriture ordinaire, la représentation figurée de la durée et de la portée des notes ne me paraît pas aussi caractérisée que par notre escalier musical, qui offre, comme image, toute la précision désirable.

Quant aux formules algébriques qui représentent les airs musicaux, je ne pense pas qu'elles puissent être de quelque utilité pratique; aussi n'ai-je fait cette application que comme un exercice d'analyse, et pour montrer comment celle-ci est susceptible d'être appliquée à un sujet qui ne paraît pas devoir se soumettre à cette grande loi de la nature et de l'entendement, que l'on nomme loi de continuité.

IX.

Nous allons maintenant établir une formule, au moyen de laquelle, on exprime toute fonction arbitraire d'une seule variable par une intégrale double qui renferme la variable, sous le signe d'une fonction très-générale.

Soit l'intégrale

$$(42) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \int_b^c \varphi(x-a_n, p)\,dp = \pm\,\theta,$$

qui s'évanouit pour $x=a_n$ et qui a pour valeur déterminée $+\theta$, ou $-\theta$, suivant que x est plus grand ou plus petit que a_n. Il suit de là que l'intégrale

$$\frac{1}{2\theta}\int_b^c [\varphi(x-a_n, p) - \varphi(x-a_{n+1}, p)\,dp,$$

dans laquelle $a_{n+1} > a_n$, sera égale à l'unité pour toutes les valeurs de x comprises entre a_n et a_{n+1}, à $\frac{1}{2}$ pour $x = a_n$ et $x = a_{n+1}$, et sera nulle



pour toute autre valeur de x; par conséquent, on aura également

$$(43)\ldots\ \frac{1}{2\vartheta}\int_b^c b_n[\varphi(x-a_n,p)-\varphi(x-a_{n+1},p)]\,dp=\begin{cases} b_n \ldots\ldots \text{ pour } x>a_n \text{ et } <a_{n+1}, \\ \frac{1}{2}b_n \ldots\ldots\ldots x=a_n, \\ \frac{1}{2}b_n \ldots\ldots\ldots x=a_{n+1}, \\ 0, \ldots\ldots\ldots x<a_n, \text{ ou } >a_{n+1}; \end{cases}$$

et ensuite

$$(44)\ldots\ \frac{1}{2\vartheta}\int_b^c \Sigma_{a_0}^{a_i}\, b_n[\varphi(x-a_n,p)-\varphi(x-a_{n+1},p)]\,dp=\begin{cases} b_n \ldots\ldots \text{ pour } x>a_n \text{ et } <a_{n+1}, \\ \frac{1}{2}(b_{n-1}+b_n) \ldots\ x=a_n, \\ \frac{1}{2}(b_n+b_{n+1}) \ldots\ x=a_{n+1}. \end{cases}$$

Si nous appliquons à cette formule les raisonnements que nous avons faits dans le n° III, à la formule (15), on trouvera aisément

$$(45) \ldots\ldots\ \psi x = -\frac{1}{2\vartheta}\int_b^c\int_{a_0}^{a_i}\psi\alpha.\frac{d.\varphi(x-\alpha,p)\,dp\,d\alpha}{d\alpha}.$$

en faisant attention que l'intégration par rapport à p a lieu entre les limites b et c.

Telle est la formule que nous nous proposions de trouver, et dans laquelle ψ représente une fonction arbitraire, soumise ou non à la loi de continuité, et φ une autre fonction qui satisfait aux conditions énoncées ci-dessus.

Le nombre des fonctions particulières qui vérifient ces conditious paraît être illimité; nous allons d'abord en faire connaître quelques-unes; ensuite, nous en tirerons les intégrales doubles correspondantes:

1° Soit d'abord

$$\varphi(x-\alpha,p)=\frac{\sin.\,p(x-\alpha)}{p},$$

ce qui donnera

$$\frac{d\varphi(x-\alpha,p)}{d\alpha}=-\cos.\,p(x-\alpha),$$

et par suite, il vient

$$\psi x=\frac{1}{2\vartheta}\int_b^c\int_{a_0}^{a_i}\psi\alpha\cos.\,p(x-\alpha)\,dp\,d\alpha.$$

Pour déterminer θ, il faut recourir à la formule (42) qui devient dans ce cas

$$\int_b^c \frac{\sin.\, p(x-\alpha)}{p}\, dp = \theta\,;$$

si l'on prend $b = o$, $c = \infty$, on aura $\theta = \frac{\pi}{2}$, et en faisant $a_o = -\infty$ et $a_i = +\infty$, il viendra la formule de Fourier

$$\psi x = \frac{1}{\pi} \int_o^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi\alpha \cos.\, p(x-\alpha)\, dp d\alpha.$$

2° Si dans l'intégrale [1]

$$(46) \quad \ldots\ldots\ldots \int_o^\infty \frac{\text{tang.}\, ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\,;$$

on change x en p et a en $x-\alpha$, il viendra

$$\int_o^\infty \frac{\text{tang.}\, p(x-\alpha)}{p}\, dp = \frac{\pi}{2},$$

comme elle satisfait aux conditions dont jouit la fonction φ, posons

$$\varphi(x-\alpha, p) = \frac{\text{tang.}\, p(x-\alpha)}{p},$$

on aura

$$\frac{d\varphi(x-\alpha, p)}{d\alpha} = -\frac{1}{\cos.^2 p(x-\alpha)},$$

et ensuite

$$(47) \quad \ldots \quad \psi x = \frac{1}{\pi} \int_o^\infty \int_{a_o}^{a_i} \frac{\psi\alpha\, dp d\alpha}{\cos.^2 p(x-\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int_o^\infty \int_{a_o}^{a_i} \psi\alpha \,\text{séc.}^2\, p(x-\alpha)\, dp d\alpha.$$

3° Soit encore l'intégrale connue

$$\int_o^\infty \frac{x \sin.\, mx}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-m},$$

[1] Legendre, *Exercices de calcul intégral*, tom. II, pag. 180.

en y changeant x en p et m en $x-\alpha$, on aura

$$\int_o^\infty e^{x-\alpha}.\frac{p\sin.p(x-\alpha)}{1+p^2}dp=\frac{\pi}{2},$$

pour $x>\alpha$; et comme pour $x<\alpha$, elle a pour valeur $-\frac{\pi}{2}$, on fera

$$\varphi(x-\alpha,p)=e^{x-\alpha}.\frac{p\sin.p(x-\alpha)}{1+p^2},$$

d'où

$$\frac{d\varphi(x-\alpha,p)}{d\alpha}=-[\sin.p(x-\alpha)+p\cos.p(x-\alpha)]\frac{pe^{x-\alpha}}{1+p^2};$$

substituant cette valeur dans la formule (45), et remarquant que $\theta=\frac{\pi}{2}$, on aura encore

$$(48)\quad\ldots\quad\psi x=\frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{a_o}^{a_i}[\sin.p(x-\alpha)+p\cos.p(x-\alpha)]\frac{pe^{x-\alpha}}{1+p^2}\psi\alpha\, dpd\alpha.$$

4° Si l'on part de

$$\int_o^\infty(x-\alpha)e^{-(x-\alpha)^2p^2}dp=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

on aura $\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et ensuite

$$\varphi(x-\alpha,p)=(x-\alpha)e^{-(x-\alpha)^2p^2};$$

mettant cette valeur dans l'équation (45), il viendra

$$(49)\quad\ldots\ldots\quad\psi x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_o^\infty\int_{a_o}^{a_i}[1-2p^2(x-\alpha)^2]e^{-(x-\alpha)^2p^2}\psi\alpha\, dpd\alpha.$$

Les formules (47), (48) et (49) sont nouvelles, et peuvent se vérifier à *posteriori* comme celle de Fourier, c'est-à-dire, en exécutant d'abord l'intégration par rapport à p, entre les limites o et k; ensuite, on posera $x-\alpha=\frac{z}{k}$, et l'on fera k infini en intégrant par rapport à α;

on retombera ainsi sur les intégrales définies d'où ces formules tirent leur origine.

Ces formules, comme celle de Fourier, servent à représenter une fonction arbitraire entre deux limites déterminées de la variable x; leur valeur est nulle quand x tombe hors de ces limites; mais, pour ces dernières valeurs, les résultats correspondants doivent être doublés, s'ils ne sont pas nuls.

La multiplicité de ces formules peut d'abord paraître superflue, puisqu'elles jouissent toutes des mêmes propriétés et du même degré de généralité; cependant, l'une convient souvent mieux que d'autres lorsqu'il s'agit de les appliquer à l'intégration des équations différentielles partielles.

Nous pourrions rapporter encore un grand nombre de formules analogues aux précédentes, ainsi que celles données par M. Cauchy dans un mémoire sur la transformation des fonctions d'une seule variable en intégrales doubles [1]; mais nous nous bornerons à reproduire la principale, celle de laquelle il a déduit toutes les autres. Nous ferons d'abord connaître les propriétés de certaines intégrales définies dans lesquelles la fonction différentielle est affectée de symboles imaginaires.

Soit l'intégrale

$$(50). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \int_0^\infty e^{-ax\sqrt{-1}}\,dx;$$

il est évident que si a est positif, on aura

$$\int_0^\infty e^{-ax\sqrt{-1}}\,dx = \frac{1}{a\sqrt{-1}},$$

et pour a négatif, il viendra

$$\int_0^\infty e^{ax\sqrt{-1}}\,dx = \int_0^\infty e^{-\frac{ax}{\sqrt{-1}}}\,dx = \frac{\sqrt{-1}}{a} = -\frac{1}{a\sqrt{-1}};$$

[1] *Exercices de mathématiques*, tom. II, pag. 112.

d'où il suit que la valeur de l'intégrale (50) sera $\frac{1}{a\sqrt{-1}}$, ou $-\frac{1}{a\sqrt{-1}}$, suivant que a sera positif ou négatif.

On embrasse à la fois le cas de a positif et de a négatif, en mettant l'équation (50) sous la forme

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{-a^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{-a^2}} = \frac{1}{a\sqrt{-1}};$$

de sorte que pour a positif, on aura $\frac{1}{a\sqrt{-1}}$ et pour a négatif, $-\frac{1}{a\sqrt{-1}}$.

Si la limite inférieure de l'intégrale (50) est $-\infty$, on obtiendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax\sqrt{-1}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\sqrt{-x^2}}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-ax\sqrt{-1}}\,dx = \frac{2}{a\sqrt{-1}}.$$

Si a est négatif, il viendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax\sqrt{-1}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{\sqrt{-x^2}}}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-\frac{ax}{\sqrt{-1}}}\,dx = -\frac{2}{a\sqrt{-1}}.$$

Soit cette autre intégrale

$$(51)\ldots\ldots\ldots\ldots \int_0^\infty e^{-(a+b\sqrt{-1})kx}\,dx;$$

Si k est positif, on aura

$$\int_0^\infty e^{-(a+b\sqrt{-1})kx}\,dx = \frac{1}{k(a+b\sqrt{-1})};$$

et pour k négatif

$$\int_0^\infty e^{(a+b\sqrt{-1})kx}\,dx = \int_0^\infty e^{-\frac{(b-a\sqrt{-1})kx}{\sqrt{-1}}}\,dx = \frac{\sqrt{-1}}{k(b-a\sqrt{-1})} = -\frac{1}{k(a+b\sqrt{-1})},$$

ce qui montre que la valeur de l'intégrale (51) change de signe avec k.

Pour obtenir une autre intégrale de la même espèce, et qui nous conduira à la formule cherchée de M. Cauchy, multiplions les deux

membres de l'identité

$$\int_0^\infty e^{-a\nu}\, d\nu = \frac{1}{a},$$

par da, et intégrons ensuite les deux membres entre les limites $r+s\sqrt{-1}$ et $r'+s'\sqrt{-1}$, il viendra

$$(52)\quad . \int_0^\infty [e^{-(r+s\sqrt{-1})\nu} - e^{-(r'+s'\sqrt{-1})\nu}]\frac{d\nu}{\nu} = \log.(r'+s'\sqrt{-1}) - \log.(r+s\sqrt{-1});$$

mais, comme

$$\log.(r'+s'\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\log.(r'^2+s'^2) + \text{arc. tang.}\frac{s'}{r'}\sqrt{-1},$$

$$\log.(r+s\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\log.(r^2+s^2) + \text{arc. tang.}\frac{s}{r}\sqrt{-1},$$

on trouvera

$$\int_0^\infty [e^{-(r+s\sqrt{-1})\nu} - e^{-(r'+s'\sqrt{-1})\nu}]\frac{d\nu}{\nu} = \tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{r'^2+s'^2}{r^2+s^2}\right) + \sqrt{-1}\left(\text{arc. tang.}\frac{s'}{r'} - \text{arc. tang.}\frac{s}{r}\right).$$

Si, pour abréger, nous posons

$$r+s\sqrt{-1} = m,\quad r'+s'\sqrt{-1} = n,$$

$$\tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{r'^2+s'^2}{r^2+s^2}\right) = \text{A},\quad \text{arc. tang.}\frac{s'}{r'} - \text{arc. tang.}\frac{s}{r} = \text{B},$$

il viendra

$$\int_0^\infty \frac{e^{-m\nu} - e^{-n\nu}}{\nu}\, d\nu = \text{A} + \text{B}\sqrt{-1};$$

faisant $\nu = p(x-\alpha)$, où p désigne la nouvelle variable, on aura

$$(53)\quad \ldots\ldots \int_0^\infty [e^{-mp(x-\alpha)} - e^{-np(x-\alpha)}]\frac{dp}{p} = \text{A} + \text{B}\sqrt{-1},$$

formule de la même espèce que (51), et qui donnera $-(\text{A}+\text{B}\sqrt{-1})$

quand x sera plus petit que α. Si dans la formule (45), nous faisons

$$b=o,\quad c=\infty,\quad \varphi(x-\alpha,p)=\frac{e^{-mp(x-\alpha)}-e^{-np(x-\alpha)}}{p},$$

on trouvera $\theta=\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1}$. Substituant cette valeur de θ et de φ dans (45), on aura la formule suivante :

$$(54).\quad \psi x=\frac{1}{2(\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1})}\int_o^\infty\int_{a_o}^{a_i}\left[(r+s\sqrt{-1}).e^{-p(r+s\sqrt{-1})(x-\alpha)}-(r'+s'\sqrt{-1}).e^{-p(r'+s'\sqrt{-1})(x-\alpha)}\right]\psi\alpha\,dpd\alpha,$$

qui comprend celle que M. Cauchy a indiquée sous la marque (27), et de laquelle il a déduit, comme cas particuliers, d'autres formules de la même espèce.

Pour vérifier la formule (54), écrivons-la en abrégé comme suit :

$$\psi x=\frac{1}{2(\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1})}\int_o^\infty\int_{a_o}^{a_i}\left[m.\,e^{-mp(x-\alpha)}-n.\,e^{-np(x-\alpha)}\right]\psi\alpha\,dpd\alpha\,;$$

en intégrant par rapport à p entre o et k, on aura

$$\int_o^\infty\left[m.\,e^{-mp(x-\alpha)}-n.\,e^{-np(x-\alpha)}\right]dp=\frac{e^{-nk(x-\alpha)}-e^{-mk(x-\alpha)}}{x-\alpha}\,;$$

substituant cette valeur dans la formule précédente, sauf à faire k infini après les intégrations, il viendra

$$\psi x=\frac{1}{2(\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1})}\int_{a_o}^{a_i}\frac{e^{-nk(x-\alpha)}-e^{-mk(x-\alpha)}}{x-\alpha}\,\psi\alpha\,d\alpha\,:$$

posons maintenant $k(x-\alpha)=z$, on aura

$$\psi x=\frac{1}{2(\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1})}\int_{k(x-a_o)}^{k(x-a_i)}\psi\left(x-\frac{z}{k}\right).\,\frac{e^{-nz}-e^{-mz}}{z}.\,dz.$$

Faisant k infini, cette équation montre que la formule (54) subsiste

pour des valeurs de x comprises entre a_o et a_i, et que pour $x=a_o$ et $x=a_i$, il faudra doubler les résultats correspondants; on voit aussi que si x est plus petit que a_o, ou plus grand que a_i, la valeur correspondante de ψx sera nulle.

Voici le moyen de trouver des formes particulières pour la fonction φ, qui entre dans la formule (45).

Posons

$$(55) \quad \frac{d\varphi(x-\alpha, p)}{dx}=\frac{d\Phi(x-\alpha, p)}{dp},$$

et admettons que de cette identité on puisse déduire, par une simple intégration, la valeur de l'une des fonctions φ ou Φ, lorsqu'on connaît l'autre, ou seulement sa dérivée. Cela posé, faisons, dans la formule (45), $b=o$, $c=\infty$ on aura

$$(56) \quad \psi x=-\frac{1}{2\theta}\int_o^\infty\int_{a_o}^{a_i}\psi\alpha.\frac{d\Phi(x-\alpha, p)}{dp}\cdot dp\, d\alpha;$$

intégrant par rapport à p, entre les limites o et $\frac{1}{\varepsilon}$, il viendra

$$\int_o^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{d\Phi(x-\alpha, p)}{dp}dp=\Phi\left(x-\alpha, \frac{1}{\varepsilon}\right);$$

et ensuite, en supposant $\frac{1}{\varepsilon}$ infiniment grand

$$\psi x=-\frac{1}{2\theta}\int_{a_o}^{a_i}\psi\alpha.\Phi\left(x-\alpha, \frac{1}{\varepsilon}\right)d\alpha;$$

faisant $\alpha-x=\varepsilon z$, on a

$$\psi x=-\frac{1}{2\theta}\int_{\frac{1}{\varepsilon}(a_o-x)}^{\frac{1}{\varepsilon}(a_i-x)}\varepsilon\psi(x+\varepsilon z)\Phi\left(-\varepsilon z, \frac{1}{\varepsilon}\right)dz;$$

or, comme x est compris entre a_o et a_i, et à cause de la valeur de ε, cette équation conduit à la suivante :

$$(57) \quad \int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon\Phi\left(-\varepsilon z, \frac{1}{\varepsilon}\right)dz=-2\theta,$$

qui montre que θ sera une quantité déterminée, si la limite de $\varepsilon\Phi(-\varepsilon z, \frac{1}{\varepsilon})$, pour ε infiniment petit, est une fonction déterminée de z, dont on connaît ou dont on peut connaître l'intégrale définie entre les limites $-\infty$ et ∞.

Prenons pour exemple

$$(58)\ldots\quad \frac{d\varphi(x-\alpha, p)}{dz} = F'p \cdot e^{-(x-z)Fp} - f'p \cdot e^{-(x-z)fp} = \frac{d\varphi(x-\alpha, p)}{dp},$$

on aura ici

$$\varphi(x-\alpha, p) = \frac{e^{-(x-\alpha)fp} - e^{-(x-\alpha)Fp}}{x-\alpha},$$

et par suite la formule (57) deviendra

$$(59)\ldots\ldots\quad \int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{\varepsilon f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)z} - e^{\varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)z}\right]\frac{dz}{z} = -2\theta.$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$Fp = F_1 p + \sqrt{-1}\, F_2 p, \quad fp = f_1 p + \sqrt{-1}\, f_2 p,$$

et que

$$\lim.\, \varepsilon F\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right) = P + Q\sqrt{-1}, \quad \lim.\, \varepsilon f\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right) = R + S\sqrt{-1};$$

il viendra

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{(R+S\sqrt{-1})z} - e^{(P+Q\sqrt{-1})z}\right]\frac{dz}{z} = -2\theta,$$

et ensuite

$$\int_{0}^{\infty}\left[e^{(R+S\sqrt{-1})z} - e^{(P+Q\sqrt{-1})z}\right]\frac{dz}{z} = -\theta;$$

en vertu de la formule (52), on aura

$$\theta = \tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{R^2+S^2}{P^2+Q^2}\right) + \sqrt{-1}.\left(\text{arc. tang.}\frac{S}{R} - \text{arc. tang.}\frac{Q}{P}\right) = A + B\sqrt{-1};$$

et enfin, la formule (45) deviendra

$$(60).\ \psi x = \frac{1}{2(A+B\sqrt{-1})}\int_a^\infty\int_{a_0}^{a_1}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d(F_1p+\sqrt{-1}\,F_2p)}{dp}\,.\,e^{-(F_1p+\sqrt{-1}\,F_2p)(x-\alpha)}\\ \dfrac{-d(f_1p+\sqrt{-1}\,f_2p)}{dp}\,.\,e^{-(f_1p+\sqrt{-1}\,f_2p)(x-\alpha)}\end{array}\right\}\psi\alpha\, dp d\alpha.$$

Cette formule suppose que les fonctions F_1p, F_2p, f_1p et f_2p s'évanouissent avec p, et que les quantités

$$\lim.\varepsilon F_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=P,\quad \lim.\varepsilon F_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=Q,\quad \lim.\varepsilon f_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=R,\quad \lim.\varepsilon f_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=S,$$

sont finies et déterminées.

On peut aisément s'assurer que la formule (60) comprend celle que M. Cauchy a désignée sous la marque (75) dans son mémoire déjà cité.

X.

Proposons-nous de déduire directement de la formule de Fourier les développements connus des fonctions suivant les sinus et les cosinus des arcs multiples. Reprenons pour cela la formule

$$(61)\ \ldots\ldots\ \varphi x = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{-m}^{m}\varphi\alpha\cos.p\,(x-\alpha)\,dp d\alpha,$$

qui représente la fonction φx pour toutes les valeurs de x comprises entre $-m$ et $+m$, quelle que soit la quantité m. Supposons d'abord que m ait une valeur infiniment grande, et faisons $p=\frac{i\pi}{m}$, i étant un nombre entier qui varie avec p, on pourra prendre $dp=\frac{\pi}{m}$, et ensuite, on aura

$$\int_o^\infty \cos.p\,(x-\alpha)\,dp = \frac{\pi}{m}\Sigma_o^\infty \cos.i\frac{\pi\,(x-\alpha)}{m};$$

or, à cause de la valeur de m, la quantité $\cos.i\frac{\pi(x-\alpha)}{m}$ sera toujours peu différente de l'unité, tant que i sera une quantité finie; mais rien

n'empêche que i surpasse m et qu'on le fasse croître au delà de cet infini : si donc, dans cette expression, on fait successivement $i=o$, $i=m$, $i=2m$, etc., on obtiendra la somme Σ_o^∞ cos. $i\pi(x-\alpha)$ qui est égale à $\frac{1}{2}$ [1], et l'on aura

$$\int_o^\infty \cos. p\,(x-\alpha)\,dp = \frac{\pi}{m}\left[\frac{1}{2} + \Sigma_1^\infty \cos. i\frac{\pi\,(x-\alpha)}{m}\right],$$

en supposant que i ne surpasse pas l'infini qui affecte le signe Σ. On obtiendra ensuite l'équation

$$\varphi x = \frac{1}{2m}\int_{-m}^{m}\varphi\alpha d\alpha + \frac{1}{m}\Sigma_1^\infty\int_{-m}^{m}\varphi\alpha \cos. i\frac{\pi\,(x-\alpha)}{m}d\alpha, \ldots .$$ [2]

qui représente encore la fonction φx pour des valeurs de x depuis $-m$ jusqu'à $+m$, et qui jouit des mêmes propriétés que la formule (61). Donc, si on veut qu'elle représente la fonction φx entre deux limites finies $-l$ et $+l$, il faudra remplacer m par l; ce qui donnera la formule connue

$$(62). \ldots\ldots \varphi x = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi\alpha d\alpha + \frac{1}{l}\Sigma_1^\infty\int_{-l}^{l}\varphi\alpha \cos. i\frac{\pi\,(x-\alpha)}{l}d\alpha.$$

En développant cos. $i\frac{\pi(x-\alpha)}{l}$, on obtient la suivante

$$(63).\ \varphi x = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi\alpha d\alpha + \frac{1}{l}\Sigma_1^\infty \cos. i\frac{\pi x}{l}\int_{-l}^{l}\varphi\alpha \cos. i\frac{\pi\alpha}{l}d\alpha + \frac{1}{l}\Sigma_1^\infty \sin. i\frac{\pi x}{l}\int_{-l}^{l}\varphi\alpha \sin. i\frac{\pi\alpha}{l}d\alpha,$$

qui exprime le développement de la fonction arbitraire φx, suivant les sinus et les cosinus des multiples de l'arc $\frac{\pi x}{l}$.

La formule (62), comme la suivante

$$\varphi x = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{-l}^{l}\varphi\alpha.\ \cos. p(x-\alpha)\,dp\,d\alpha,$$

[1] Cagnoli, *Trigonométrie*, pag. 108.

[2] Voyez la note 2me, à la fin du mémoire.

représente la fonction arbitraire φx pour toutes les valeurs de x qui sont comprises entre $-l$ et $+l$; pour ces valeurs extrêmes, non-seulement elles ne subsistent plus généralement, mais elles ne donnent pas même des résultats identiques; il faut cependant excepter le cas où ces valeurs font évanouir la fonction φx. Nous avons démontré que pour faire usage de la dernière formule quand $x = \pm l$, il faut doubler les valeurs correspondantes de φx. Quant à la formule (62), si l'on y fait $x = \pm l$, on trouvera pour la valeur du second membre $\frac{1}{2}[\varphi l + \varphi(-l)]$; résultat qui n'est identique avec le premier qu'autant que l'on a $\varphi l = \varphi(-l)$, c'est-à-dire, lorsque la fonction φx est paire. Si φx est une fonction impaire, le second membre de l'équation (62) est nul, et n'est identique au premier qu'autant que φx s'évanouit pour $x = \pm l$.

Avant de démontrer ces conséquences, je vais donner une vérification facile de la formule (62). En la mettant sous la forme

$$(64) \quad \ldots\ldots \quad y = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \varphi\alpha \left[\tfrac{1}{2} + \Sigma_1^\infty \cos. i \frac{\pi(x-\alpha)}{l} \right] d\alpha,$$

et observant que x et α sont compris entre $-l$ et $+l$, on aura pour toutes les valeurs finies de $x-\alpha$

$$\Sigma_1^\infty \cos. i \frac{\pi(x-\alpha)}{l} = -\tfrac{1}{2},$$

c'est-à-dire, pour toutes les valeurs de α qui diffèrent de x d'une quantité finie. Pour ces valeurs, on voit que y devient nul; nous devons donc considérer seulement les valeurs de α qui diffèrent de x d'une quantité infiniment petite, et examiner ce que deviennent, dans cette hypothèse, les deux termes du second membre de l'équation (64), c'est-à-dire,

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \varphi\alpha d\alpha, \text{ et } \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \varphi\alpha\Sigma_1^\infty \cos. i \frac{\pi(x-\alpha)}{l} d\alpha;$$

pour le premier, on aura

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi\alpha d\alpha = \frac{1}{2l}\,\varphi x\int_{-l}^{l} d\alpha = \varphi x\,,$$

et pour le second terme

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi\alpha\ \Sigma_1^\infty\ \cos.\ i\,\frac{\pi(x-\alpha)}{l}\,d\alpha = \frac{1}{l}\,\varphi x.\ \Sigma_1^\infty\int_{-l}^{l}\cos.\ i\,\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha\ ;$$

ou bien, en intégrant

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi\alpha\ \Sigma_1^\infty\ \cos.\ i\,\frac{\pi(x-\alpha)}{l}\,d\alpha = \frac{1}{\pi}\,\varphi x\ \Sigma_1^\infty\ \frac{1}{i}\left[\sin.\ i\,\frac{\pi(x-l)}{l} - \sin.\ i\,\frac{\pi(x+l)}{l}\right];$$

mais à cause de

$$\sin.\ i\,\frac{\pi(x-l)}{l} = (-1)^i.\ \sin.\ i\,\frac{\pi x}{l}\,,$$

$$\sin.\ i\,\frac{\pi(x+l)}{l} = (-1)^i.\ \sin.\ i\,\frac{\pi x}{l}\,,$$

il viendra pour toutes les valeurs de α qui diffèrent infiniment peu de x

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi\alpha\ \Sigma_1^\infty\ \cos.\ i\,\frac{\pi(x-\alpha)}{l}\,d\alpha = o\ ;$$

d'où l'on conclut que le second membre de la formule (64) se réduit à φx pour toute valeur de x comprise entre $-l$ et $+l$.

Il serait facile de démontrer, par des calculs analogues aux précédents, que si x tombait hors des limites $-l$ et $+l$, la valeur de y, dans l'équation (64), serait nulle.

Voyons maintenant ce que devient la formule (64) lorsque $x = \pm l$. Posons d'abord $x = l$, on aura dans ce cas

$$y = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi\alpha d\alpha + \frac{1}{l}\ \Sigma_1^\infty\int_{-l}^{l}\varphi\alpha.\ (-1)^i\cos.\ i\,\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

en remarquant que $\cos. i\pi = (-1)^i$ et $\sin. i\pi = o$. Or, comme la quantité $\Sigma_1^\infty (-1)^i \cos. i\frac{\pi\alpha}{l}$ est égale à $\frac{1}{2}$ pour toutes les valeurs de α qui sont moindres que l, il suit que, pour ces valeurs, y devient nul; donc, pour connaître la valeur de y, il faut seulement considérer les valeurs de α qui diffèrent infiniment peu de $\pm l$. Dans ce cas, le terme $\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi\alpha d\alpha$ s'évanouit, et il reste

$$y = \frac{1}{l}\cdot \Sigma_1^\infty \int_{-l}^{l} \varphi\alpha . (-1)^i \cos. i\frac{\pi\alpha}{l} d\alpha,$$

ou bien

$$y = \frac{1}{l}\,\Sigma_1^\infty (-1)^i \left[\int_{-l}^{o} \varphi\alpha \cos. i\frac{\pi\alpha}{l} d\alpha + \int_{o}^{l} \varphi\alpha \cos. i\frac{\pi\alpha}{l} d\alpha\right];$$

cela posé, désignant par z une quantité infiniment petite et positive, on aura pour $\alpha = -l + z$,

$$\int_{-l}^{o} \varphi\alpha \cos. i\frac{\pi\alpha}{l} d\alpha = \varphi(-l)\int_{o}^{l} (-1)^i \cos. i\frac{\pi z}{l} dz = \frac{l}{i\pi}\,\varphi(-l)\,(-1)^i \sin. i\frac{\pi z}{l},$$

et pour $\alpha = l - z$,

$$\int_{o}^{l} \varphi\alpha \cos. i\frac{\pi\alpha}{l} d\alpha = \varphi l . \int_{o}^{l} (-1)^i . \cos. i\frac{\pi z}{l} dz = \frac{i\pi}{l}\,\varphi l . (-1)^i \sin. i\frac{\pi z}{l};$$

mettant ces valeurs dans la dernière expression de y, on obtiendra

$$y = \frac{1}{\pi}\,[\varphi l + \varphi(-l)]\,\Sigma_1^\infty \frac{1}{i} \sin. i\frac{\pi z}{l};$$

mais pour des valeurs de x moindres que π, on a

$$\Sigma_1^\infty \frac{1}{i} \sin. ix = \tfrac{1}{2}(\pi - x);$$

mettant $\frac{\pi z}{l}$ à la place de x, et observant que la valeur de z est infiniment petite, il viendra

$$\Sigma_1^\infty \frac{1}{i} \sin. i . \frac{\pi z}{l} = \frac{\pi}{2},$$

et enfin

$$y = \tfrac{1}{2}\left[\varphi l + \varphi(-l)\right];$$

ce qui est la valeur du second membre de l'équation (64) lorsque $x = l$; si l'on fait $x = -l$, les calculs ne différeront pas des précédents, et l'on trouvera le même résultat.

On voit donc que pour $x = \pm l$, les deux membres de la formule (62) ne sont identiques que si $\varphi l = \varphi(-l)$; si φx est une fonction impaire, la quantité $\frac{1}{2}[\varphi l + \varphi(-l)]$ sera nulle, et par suite la formule (62) ne sera vraie pour $x = \pm l$, dans ce cas, qu'autant que la fonction φx devient nulle pour ces valeurs extrêmes.

Si dans (62) φx est nulle depuis $x = o$, jusqu'à $x = -l$, les limites des intégrales relatives à α se réduiront à o et l; on aura alors la formule

$$\varphi x = \frac{1}{2l}\int_o^l \varphi\alpha d\alpha + \frac{1}{l}\Sigma_1^\infty \int_o^l \varphi\alpha \cos. i\frac{\pi(x-\alpha)}{l}d\alpha,$$

qui a lieu pour des valeurs de x entre o et l; mais qui ne donnera que la moitié des valeurs de φx, quand on fera $x = o$ et $x = l$.

Si dans cette formule on change x en $-x$, on aura la suivante

$$o = \frac{1}{2l}\int_o^l \varphi\alpha\, d\alpha + \frac{1}{l}\Sigma_1^\infty \int_o^l \varphi\alpha \cos. i\frac{\pi(x+\alpha)}{l}d\alpha,$$

qui sera nulle pour des valeurs de x entre o et l, et qui, pour ces dernières valeurs, ne donnera que la moitié de φx; donc, si l'on ajoute cette équation à la précédente, l'équation résultante

(65) . . . . $$\varphi x = \frac{1}{l}\int_o^l \varphi\alpha\, d\alpha + \frac{2}{l}\Sigma_1^\infty \int_o^l \varphi\alpha \cos. i\frac{\pi x}{l} \cdot \cos. i\frac{\pi\alpha}{l}d\alpha,$$

subsistera pour toutes les valeurs de x entre o et l, et même quand x sera égal à ces limites; ensuite, si on les retranche, on obtiendra

(66) . . . . $$\varphi x = \frac{2}{\pi}\Sigma_1^\infty \sin. i\frac{\pi x}{l}\int_o^l \varphi\alpha \sin. i\frac{\pi\alpha}{l}d\alpha;$$

équation qui a lieu pour des valeurs de x entre o et l, mais qui ne subsiste, pour ces valeurs extrêmes, qu'autant qu'elles font évanouir φx.

Les formules (65) et (66) ne subsistent pas seulement pour des valeurs de x entre o et l, mais pour toutes celles qui sont comprises dans l'intervalle $-l$ et $+l$; en effet, la première représente une fonction paire, et la seconde une fonction impaire, puisque les fonctions cos. $i\frac{\pi x}{l}$ et sin. $i\frac{\pi x}{l}$, que renferment les seconds membres, sont respectivement paires et impaires. Ainsi, en prenant pour φx deux fonctions Fx et fx, telles que $Fx = F(-x)$ et $fx = -f(-x)$, on aura les deux formules :

$$(67) \ldots\ldots \quad Fx = \frac{1}{l}\int_o^l F\alpha\, d\alpha + \frac{2}{l}\,\Sigma_1^\infty \cos.\, i\frac{\pi x}{l}\int_o^l \varphi\alpha \cos.\, i\frac{\pi \alpha}{l}\, d\alpha,$$

$$(68) \ldots\ldots \quad fx = \frac{2}{l}\,\Sigma_1^\infty \sin.\, i\frac{\pi x}{l}\int_o^l f\alpha.\sin.\, i\frac{\pi\alpha}{l}\, d\alpha,$$

qui sont analogues à celles désignées sous les marques (37) et (38).

On peut aussi déduire ces deux formules de l'équation (63); il suffit pour cela, de remplacer φx par Fx et fx, et de remarquer que

$$\int_{-l}^{l} F\alpha \sin.\, i\frac{\pi\alpha}{l}\, d\alpha = o,\quad \int_{-l}^{l} f\alpha d\alpha = o,\quad \int_{-l}^{l} f\alpha \cos.\, i\frac{\pi\alpha}{l}\, d\alpha = o.$$

Enfin, on pourrait encore obtenir ces deux formules par des raisonnements analogues à ceux qui ont conduit à l'équation (62).

Les lieux géométriques représentés par les équations (67) et (68) sont situés dans les deux sens de l'axe des x, et divisés en deux parties par l'axe des y. On peut transporter l'origine au point dont l'abscisse est $x = -l$; pour cela, on remplacera l, x et α, par $2l$, $x-l$ et $\alpha - l$, et mettant F_1x, et f_1x, au lieu de $F(x-l)$ et $f(x-l)$, on obtiendra les deux nouvelles équations :

$$F_1x = \frac{1}{2l}\int_o^{2l} F_1\alpha\, d\alpha + \frac{1}{l}\,\Sigma_1^\infty \cos.\, i\frac{\pi(x-l)}{l}\int_o^{2l} F_1\alpha \cos.\, i\frac{\pi(\alpha-l)}{l}\, d\alpha,$$

$$f_1x = \frac{1}{l}\,\Sigma_1^\infty \sin.\, i\frac{\pi(x-l)}{l}\int_o^{2l} f_1\alpha.\sin.\, i\frac{\pi(\alpha-l)}{l}\, d\alpha,$$

analogues à celles représentées par (39) et (40).

On peut encore tirer d'autres formules des équations précédentes; mais je ne m'arrêterai pas à leur recherche, parce qu'elles ne donnent lieu à aucune propriété qu'on ne puisse exprimer par les formules déjà trouvées.

Toutes ces formules tirent leur origine de celle de Fourier; on pourrait, par des raisonnements et par des calculs analogues aux précédents, tirer des formules de la même espèce des équations désignées par (47), (48), (49), (53) et (60).

Les formules (67) et (68) servent principalement à représenter des fonctions périodiques; en effet, supposons que l'on fasse $l=\pi$, nous obtiendrons les deux équations

$$Fx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F\alpha d\alpha+\frac{2}{\pi}\Sigma_1^\infty \cos. ix\int_0^\pi F\alpha \cos. i\alpha\, d\alpha,$$

$$fx=\frac{2}{\pi}\Sigma_1^\infty \sin. ix\int_0^\pi f\alpha \sin. i\alpha\, d\alpha,$$

dont les seconds membres conservent la même valeur quand on y remplace x par $x\pm 2k\pi$, k étant un nombre entier quelconque. Il suit de là que Fx et fx, auront les mêmes valeurs pour des valeurs de x comprises dans les intervalles 0 et 2π, 2π et 4π, 4π et 6π, etc.... et dans les suivants 0 et -2π, -2π et -4π, -4π et -6π, etc.... On dit alors que la période de la fonction est 2π. On peut facilement concevoir la forme du lieu géométrique représenté par chacune des équations précédentes.

Si l'on veut que la période ait une grandeur quelconque, il faut faire $l=l'\pi$, alors les équations (67) et (68) deviendront

$$Fx=\frac{2}{l'\pi}\int_0^{l'\pi} F\alpha d\alpha+\frac{2}{l'\pi}\Sigma_1^\infty \cos. i\frac{x}{l'}\int_0^{l'\pi} F\alpha. \cos. i\frac{\alpha}{l'}d\alpha,$$

$$fx=\frac{2}{l'\pi}\Sigma_1^\infty \sin. i\frac{x}{l'}\int_0^{l'\pi} f\alpha. \sin. i.\frac{\alpha}{l'}\,d\alpha;$$

La période sera ici $2l'\pi$, et comme l' est une quantité arbitraire, il en sera de même de la période $2l'\pi$.

XI.

Les formules que nous avons obtenues dans le numéro précédent, pour représenter les fonctions arbitraires, ne subsistent plus lorsqu'on attribue à la variable x les limites de l'intervalle que l'on considère, à moins que pour ces valeurs, la fonction ne devienne nulle. M. Poisson a cherché à obvier à cet inconvénient, du moins pour les formules (62) et (66) du numéro précédent, c'est-à-dire, qu'il a cherché à les modifier de manière qu'elles subsistent encore pour ces valeurs limites [1]. Il y est parvenu en ajoutant au second membre un terme qu'il nomme *complémentaire*, qui devient nul quand x est compris entre les limites assignées à la variable, et qui, pour ces dernières valeurs, exprime ce qu'il faut ajouter au second membre pour le rendre identique au premier. Mais ce savant analyste ne paraît pas avoir examiné si ces formules ainsi modifiées subsistent encore quand la variable tombe hors de l'intervalle mentionné, ce qui n'a plus lieu effectivement; de plus, il n'a trouvé ces termes complémentaires que d'une manière indirecte, c'est-à-dire, comme des conséquences de l'existence des formules qui résultent de la différentiation et de l'intégration effectuées sur celles qu'il s'agit de compléter.

Nous allons trouver d'une manière directe les résultats obtenus par M. Poisson; considérons d'abord la formule de Lagrange

$$(69) \quad \ldots\ldots\ldots \quad fx = \frac{2}{l}\,\Sigma_1^{\infty} \sin.\, i\frac{\pi x}{l}\int_0^l \sin.\, i\frac{\pi\alpha}{l}\, d\alpha\,,$$

qui subsiste pour toutes les valeurs de x entre $-l$ et $+l$ et aussi entre o et l, mais qui n'est vraie pour ces limites qu'autant qu'elles font

[1] Voyez le 19e cahier du *Journal de l'école polytechnique*, pag. 143, n° 61, ou la *Théorie mathématique de la chaleur*, pag. 193, n° 99.



évanouir la fonction fx. Pour $x < -l$ et $x > l$, le second membre de cette formule est toujours nul. Cherchons quelle quantité il faut ajouter à son second membre pour qu'elle subsiste encore lors même que fx ne devient pas nulle pour $x = o$ et $x = l$. Cette quantité doit être nulle quand x est entre o et l, et donner $f(o)$ et $f(l)$ pour $x = o$ et $x = l$. Si dans la formule (69) on remplace fx et $f\alpha$ par x et α, on aura

$$x = \frac{2}{l} \Sigma_1^\infty \sin. i \frac{\pi x}{l} \int_o^l \alpha \sin. i \frac{\pi \alpha}{l} d\alpha;$$

en effectuant l'intégration indiquée, il vient l'équation

$$(70). \quad \ldots \quad x = -\frac{2l}{\pi} \Sigma_1^\infty \frac{(-1)^i}{i} . \sin. i \frac{\pi x}{l},$$

dont les deux membres sont identiques quand x est compris entre o et l ainsi que pour $x = o$, mais dont le second membre seul devient nul pour $x = l$ et $x > l$; de là il suit que l'expression

$$(71) \quad \ldots \quad \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \Sigma_1^\infty \frac{(-1)^i}{i} . \sin. i \frac{\pi x}{l},$$

est nulle pour toutes les valeurs de x, depuis $x = o$, jusqu'à $x < l$; pour $x = l$, elle se réduit à l'unité, et comme le second terme disparaît pour $x > l$, elle se réduira dans ce cas à $\frac{x}{l}$. Cela posé, si dans (71) on change x en $l - x$, on aura la nouvelle expression

$$\frac{l-x}{l} + \frac{2}{\pi} \Sigma_1^\infty \frac{(-1)^i}{i} . \sin. i \frac{\pi (l-x)}{l},$$

qui sera nulle quand x sera compris entre o et l, ainsi que pour $x = l$; mais pour $x = o$, elle se réduit à l'unité; or, si l'on observe que

$$\sin. i \frac{\pi (l-x)}{l} = -(-1)^i . \sin. \frac{\pi x}{l},$$

l'expression précédente deviendra

$$(72). \quad \ldots \quad \frac{l-x}{l} - \frac{2}{\pi} \Sigma_1^\infty \frac{1}{i} \sin. i \frac{\pi x}{l}.$$

En multipliant les fonctions (71) et (72) respectivement par $f(l)$ et $f(o)$, on obtiendra la somme

$$(73)\ldots\quad \left[\frac{l-x}{l}-\frac{2}{\pi}\,\Sigma_1^\infty\,\frac{1}{i}\sin.\,i\,\frac{\pi x}{l}\right]f(o)+\left[\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\,\Sigma_1^\infty\,\frac{(-1)^i}{i}\sin.\,i\,\frac{\pi x}{l}\right]fl,$$

qui sera nulle pour toutes les valeurs de x entre o et l, mais qui se réduira à $f(o)$ et à $f(l)$ pour $x=o$ et $x=l$. Pour $x>l$, elle deviendra

$$\frac{l-x}{l}\,f(o)+\frac{x}{l}\,f(l),$$

quantité qui n'est pas nulle puisque, par hypothèse, la fonction fx ne s'évanouit pas pour $x=o$ et $x=l$.

En ajoutant l'expression (73) au second membre de la formule (69), on a la suivante :

$$\begin{aligned} fx=&\left[\frac{l-x}{l}-\frac{2}{\pi}\,\Sigma_1^\infty\,\frac{1}{i}\,\sin.\,i\,\frac{\pi x}{l}\right]f(o)\\ &+\left[\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\,\Sigma_1^\infty\,\frac{(-1)^i}{i}\,\sin.\,i\,\frac{\pi x}{l}\right]f(l)\\ &+\frac{2}{l}\,\Sigma_1^\infty\,\sin.\,i\,\frac{\pi x}{l}\int_o^l fz\,\sin.\,i\,\frac{\pi z}{l}\,dz, \end{aligned}$$

donnée par M. Poisson, et qui subsiste pour toutes les valeurs de x entre o et l, et même pour ces limites, mais qui n'est plus vraie quand $x>l$.

Si l'on veut que la formule (69) subsiste pour les valeurs extrêmes $x=\pm\,l$, il faudra ajouter au second membre le terme complémentaire

$$\tfrac{1}{2}[fl-f(-l)]\left[\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\,\Sigma_1^\infty\,\frac{(-1)^i}{i}\,\sin.\,i\,\frac{\pi x}{l}\right],$$

qui, d'après la propriété de l'expression (71), sera nul quand x tombe entre $x=-l$ et $x=l$, et deviendra

$$\tfrac{1}{2}[fl-f(-l)]=fl,\quad\text{pour}\quad x=l$$

et

$$-\tfrac{1}{2}[fl-f(-l)]=f(-l),\ \text{pour}\ x=-l;$$

la fonction fx étant impaire. On aura dans ce cas la formule

$$fx = \tfrac{1}{2}[fl - f(-l)]\left[\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\Sigma_1^\infty \frac{(-1)^i}{i} \sin.\, i\frac{\pi x}{l}\right]$$
$$+ \frac{1}{l}\Sigma_1^\infty \sin.\, i\frac{\pi x}{l}\int_{-l}^{l} f\alpha \sin.\, i\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

qui subsiste pour toutes les valeurs de x entre $-l$ et $+l$, et même pour ces limites.

On trouvera de même que la formule (62) subsistera pour $x = \pm l$, si on l'écrit comme suit :

$$\varphi x = \tfrac{1}{2}[\varphi l - \varphi(-l)]\left[\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\Sigma_1^\infty \frac{(-1)^i}{i} \sin.\, i\frac{\pi x}{l}\right]$$
$$+ \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \varphi\alpha\,d\alpha + \frac{1}{l}\Sigma_1^\infty \int_{-l}^{l} \varphi\alpha \cos.\, i\frac{\pi(x-\alpha)}{l}\,d\alpha\,;$$

en effet, pour $x = \pm l$, on aura

$$\varphi(\pm l) = \pm\tfrac{1}{2}[\varphi l - \varphi(-l)] + \tfrac{1}{2}[\varphi l + \varphi(-l)];$$

en prenant le signe supérieur, le second membre devient

$$\tfrac{1}{2}[\varphi l - \varphi(-l)] + \tfrac{1}{2}[\varphi l + \varphi(-l)] = \varphi l,$$

et pour le signe inférieur

$$-\tfrac{1}{2}[\varphi l - \varphi(-l) + \tfrac{1}{2}[\varphi l + \varphi(-l)] = \varphi(-l);$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Considérons encore la formule de Fourier

$$\varphi x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_\beta^{\beta'} \varphi\alpha \cos.\, p(x-\alpha)\,dp\,d\alpha\,;$$

on sait que les valeurs du second membre, correspondantes à $x = \beta$ et $x = \beta'$ doivent être doublées pour qu'elles soient identiques à celles du premier.

Si l'on veut que cette formule subsiste encore à ces limites, nous écrirons

$$\varphi x = \tfrac{1}{2}\varphi\beta.\left(1 + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin. p(\beta - x)}{p}\,dp\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\varphi\beta'.\left(1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\ p(\beta' - x)}{p}\,dp\right)$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_\beta^{\beta'} \varphi\alpha \cos. p(x - \alpha)\,dp d\alpha.$$

Il est visible que les deux premières parties sont nulles, quand x est compris entre β et β', et que, pour $x = \beta$, la première devient $\frac{1}{2}\varphi\beta$ et la seconde nulle; tandis que pour $x = \beta'$ cette dernière devient $\frac{1}{2}\varphi\beta'$ et la première nulle. Donc, pour $x = \beta$ et $x = \beta'$ le second membre de la formule précédente est identique au premier.

XII.

M. Cauchy a démontré le premier que l'ordre dans lequel on effectue les intégrations dans les intégrales doubles, n'est pas toujours indifférent, car les résultats peuvent ne pas être identiques; c'est ce qui a lieu lorsque la fonction différentielle éprouve une solution de continuité pour des valeurs des variables comprises entre les limites des intégrations; dans les autres cas, on regarde l'ordre des intégrations comme arbitraire; mais cela n'a lieu toutefois, qu'autant que les limites des intégrales sont des constantes, et n'est plus vrai lorsque ces limites dépendent de paramètres que renferme la fonction différentielle. Ce que je vais démontrer.

En supposant que a et b soient des fonctions de α, l'intégrale définie

(74) . . . . $y = \int_a^b \varphi(\alpha, \beta)\, d\beta,$

est une fonction de a, b, α, et, par conséquent une fonction de α. On

aura d'abord :

$$(75) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da}\cdot\frac{da}{dx} + \frac{dy}{db}\cdot\frac{db}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

où $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ est la dérivée de y par rapport à x, en y considérant a et b comme constants. Afin d'abréger les calculs, posons

$$\int \varphi(x, \beta)\, d\beta = \psi(x, \beta),$$

on obtiendra les deux relations

$$y = \psi(x, b) - \psi(x, a) \quad \text{et} \quad \varphi(x, \beta) = \frac{d\psi(x, \beta)}{d\beta};$$

la première donne successivement

$$\frac{dy}{da} = -\frac{d\psi(x, a)}{da} = -\varphi(x, a),$$

$$\frac{dy}{db} = +\frac{d\psi(x, b)}{db} = +\varphi(x, b),$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\psi(x, b)}{dx} - \frac{d\psi(x, a)}{dx};$$

mais en vertu de la seconde, on a

$$\frac{d\varphi(x, \beta)}{dx} = \frac{d^2\psi(x, \beta)}{d\beta dx}, \text{ d'où } \frac{d\psi(x, \beta)}{dx} = \int \frac{d\varphi(x, \beta)}{dx} d\beta,$$

et par suite

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int \frac{d\varphi(x, b)}{dx} db - \int \frac{d\varphi(x, a)}{dx} da = \int_a^b \frac{d\varphi(x, \beta)}{dx} d\beta.$$

Mettant ces valeurs de $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{db}$ et $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dans l'équation (75), il vient la formule

$$(76) \ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx} = \int_a^b \frac{d\varphi(x, \beta)}{dx} d\beta - \varphi(x, a)\frac{da}{dx} + \varphi(x, b)\frac{db}{dx},$$

qui exprime la dérivée de la fonction désignée par l'intégrale (74) par

rapport à α. En remplaçant $\frac{d\varphi(\alpha,\beta)}{d\alpha}$ par $f(\alpha,\beta)$, on aura

$$\frac{dy}{d\alpha}=\int_a^b f(\alpha,\beta)\,d\beta-\frac{da}{d\alpha}\int f(\alpha,a)\,d\alpha+\frac{db}{d\alpha}\int f(\alpha,b)\,d\alpha;$$

intégrant par rapport à α, il viendra

$$y=\int d\alpha\int_a^b f(\alpha,\beta)\,d\beta-\int d\alpha\,\frac{da}{d\alpha}\cdot\int f(\alpha,a)\,d\alpha+\int d\alpha\,\frac{db}{d\alpha}\cdot\int f(\alpha,b)\,d\alpha.$$

en remplaçant dans (74), $\varphi(\alpha,\beta)$ par $\int f(\alpha,\beta)d\alpha$, on aura aussi

$$y=\int_a^b d\beta\int f(\alpha,\beta)\,d\alpha;$$

comparant ces deux valeurs de y, on obtiendra

$$\int_a^b d\beta\int f(\alpha,\beta)\,d\alpha=\int d\alpha\int_a^b f(\alpha,\beta)\,d\beta-\int d\alpha\,\frac{da}{d\alpha}\cdot\int f(\alpha,a)d\alpha+\int d\alpha\,\frac{db}{d\alpha}\cdot\int f(\alpha,b)\,d\alpha;$$

mais, à cause de

$$\int d\alpha\;\frac{da}{d\alpha}\cdot\int f(\alpha,a)\,d\alpha=a\int f(\alpha,a)\,d\alpha-\int af(\alpha,a)\,d\alpha,$$

$$\int d\alpha\cdot\frac{db}{d\alpha}\cdot\int f(\alpha,b)\,d\alpha=b\int f(\alpha,b)\,d\alpha-\int bf(\alpha,b)\,d\alpha,$$

on aura la relation

$$(77).\quad\int_a^b d\beta\int f(\alpha,\beta)\,d\alpha=\int d\alpha\int_a^b f(\alpha,\beta)\,d\beta-a\int f(\alpha,a)\,d\alpha+\int af(\alpha,a)\,d\alpha$$
$$+\,b\int f(\alpha,b)\,d\alpha-\int bf(\alpha,b)\,d\alpha,$$

qui donne l'intégrale définie d'une intégrale générale, au moyen de l'intégrale générale de l'intégrale définie et d'autres intégrales générales.

On en tire aussi la suivante :

$$(78).\quad\int d\alpha\int_a^b f(\alpha,\beta)\,d\beta=\int_a^b d\beta\int f(\alpha,\beta)\,d\alpha-b\int f(\alpha,b)\,d\alpha+\int bf(\alpha,b)\,d\alpha$$
$$+\,a\int f(\alpha,a)\,d\alpha-\int af(\alpha,a)\,d\alpha,$$

qui fait voir comment on doit intégrer une intégrale définie par rapport à un paramètre qu'elle renferme.

Cela étant, si dans l'équation (76) on remplace $\frac{d\varphi(\alpha, \beta)}{d\alpha}$ par $F(\alpha, \beta)$, il viendra

$$\frac{dy}{d\alpha} = \int_a^b F(\alpha, \beta)\, d\beta - \frac{da}{d\alpha} \int F(\alpha, a)\, d\alpha + \frac{db}{d\alpha} \cdot \int F(\alpha, b)\, d\alpha$$

multipliant les deux membres par $d\alpha$ et intégrant entre les limites a_1 et b_1, fonctions de α, on aura

$$y = \int_{a_1}^{b_1} d\alpha \int_a^b F(\alpha, \beta)\, d\beta - \int_{a_1}^{b_1} d\alpha \frac{da}{d\alpha} \cdot \int F(\alpha, a)\, d\alpha + \int_{a_1}^{b_1} d\alpha \frac{db}{d\alpha} \cdot \int F(\alpha, b)\, d\alpha ;$$

changeant dans (74), $\varphi(\alpha, \beta)$ en $\int_{a_1}^{b_1} F(\alpha, \beta) d\alpha$, il viendra

$$y = \int_a^b d\beta \int_{a_1}^{b_1} F(\alpha, \beta)\, d\alpha ,$$

et par suite, on aura l'équation

$$(79).\ \int_a^b d\beta \int_{a_1}^{b_1} F(\alpha, \beta) d\alpha = \int_{a_1}^{b_1} d\alpha \int_a^b F(\alpha, \beta) d\beta - \int_{a_1}^{b_1} d\alpha \frac{da}{d\alpha} \int F(\alpha, a) d\alpha + \int_{a_1}^{b_1} d\alpha \frac{db}{d\alpha} \cdot \int F(\alpha, b)\, d\alpha ,$$

qui montre que les deux intégrales doubles

$$\int_a^b d\beta \int_{a_1}^{b_1} F(\alpha, \beta)\, d\alpha , \quad \int_{a_1}^{b_1} d\alpha \int_a^b F(\alpha, \beta)\, d\beta ,$$

ne sont pas identiques généralement, mais elles le seront quand a et b sont des quantités indépendantes de α, en supposant toutefois que la fonction différentielle n'éprouve aucune solution de continuité entre les limites des intégrations.

NOTES.

I.

On pourrait croire que la valeur de y, dans l'équation

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y = \int_0^\infty \frac{\sin.\, p(x-\alpha)}{p}\, dp,$$

croît et décroît suivant la loi de continuité, depuis 0 jusqu'à $\frac{\pi}{2}$ et depuis 0 jusqu'à $-\frac{\pi}{2}$, lorsque la différence $x-\alpha$ varie d'une manière continue, depuis zéro jusqu'à une quantité finie très-petite, positive ou négative, et par suite, que le lieu géométrique de l'équation (1) comprend une ligne idéale, *figure* 1re, infiniment voisine de la perpendiculaire mm', passant par les extrémités alternantes des deux éléments de mn et $m'n'$, contiguës à mm', et par le milieu de cette droite. Pour démontrer que cette ligne n'existe pas, même idéalement, différentions l'équation (1), et nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^\infty \cos.\, p(x-\alpha)\, dp;$$

or, on peut considérer le second membre comme la limite de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-ap} \cos.\, p(x-\alpha)\, dp = \frac{a}{a^2 + (x-\alpha)^2}:$$

lorsque a devient nul; on aura ainsi

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx} = \lim. \left[\frac{a}{a^2 + (x-\alpha)^2}\right].$$

résultat qui fait voir que pour toute valeur finie ou infiniment petite, d'un ordre quel-



conque de $x-\alpha$ on aura $\frac{dy}{dx}=0$, c'est-à-dire que la tangente aux points correspondants à ces abscisses, est parallèle à l'axe des x. Si $x=\alpha$, on aura $\frac{dy}{dx}=\infty$, par conséquent, la tangente au point p est la perpendiculaire mm'.

L'équation (2) donne

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\lim.\left[\frac{2a(x-\alpha)}{(a^2+(x-\alpha)^2)^2}\right],$$

ce qui montre que $\frac{d^2y}{dx^2}$ est aussi nul quand $x-\alpha$ est une quantité finie ou infiniment petite, et devient infinie pour $x=\alpha$; donc le rayon de courbure

$$\gamma=\frac{[a^2+(a^2+(x-\alpha)^2)^2]^{\frac{3}{2}}}{2a(x-\alpha)(a^2+(x-\alpha)^2)},$$

est infini pour toute valeur finie ou infiniment petite de $x-\alpha$, et nul pour $x=\alpha$; d'où l'on peut conclure que la perpendiculaire mm', ni aucune ligne qui en approche infiniment, ne font partie du lieu géométrique de l'équation (1), mais que, pour des valeurs de x dans le voisinage de l'abscisse α, les points correspondants sont ou sur les parallèles mn et $m'n'$, et très-proches de m et m', ou sur l'axe des x dans le voisinage du point p, milieu de mm', c'est-à-dire, le point p lui-même.

II.

On pourrait peut-être ne pas trouver très-rigoureuse la méthode par laquelle nous sommes parvenus, dans le n° X, à la formule

$$(1)\quad\ldots\ldots\quad \varphi x=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi\alpha d\alpha+\frac{1}{l}\Sigma_1^\infty\int_{-l}^{l}\varphi\alpha.\cos.i\frac{\pi(x-\alpha)}{l}d\alpha,$$

à cause des raisonnements un peu abstraits que nous avons faits pour passer de la relation

$$\int_0^\infty\cos.p(x-\alpha)dp=\frac{\pi}{m}\Sigma_0^\infty\cos.i\frac{\pi(x-\alpha)}{m},$$

à la suivante

$$\int_0^\infty\cos.p(x-\alpha)dp=\frac{\pi}{m}\left[\tfrac{1}{2}+\Sigma_1^\infty\cos.i\frac{\pi(x-\alpha)}{m}\right];$$

voici un autre moyen de parvenir à la formule (1).

L'équation

$$\varphi x = \frac{1}{\pi} \int_o^\infty \int_{-m}^{m} \varphi \alpha \cos. p(x-\alpha)\, dp d\alpha$$

étant mise sous la forme

$$(2) \quad \varphi x = \frac{1}{m} \Sigma_o^\infty \int_{-m}^{m} \varphi \alpha \cos. i \frac{\pi(x-\alpha)}{m},$$

comme dans le n° X, on remarque que le terme qui résulte de $i = o$, dans le développement du second membre, est indépendant de x; il doit donc être égal à la valeur de φx quand $x = o$; dans cette hypothèse, on a

$$\varphi(o) = \frac{1}{m} \int_{-m}^{m} \varphi \alpha\, \Sigma_o^\infty \cos. i \frac{\pi \alpha}{m}\, d\alpha\,;$$

mais, à cause de

$$\Sigma_o^\infty \cos. i \frac{\pi \alpha}{m} = 1 + \Sigma_1^\infty \cos. i \frac{\pi \alpha}{m} = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2},$$

on a

$$\varphi(o) = \frac{1}{2m} \int_{-m}^{m} \varphi \alpha\, d\alpha,$$

et par suite, la formule (2) deviendra

$$\varphi x = \frac{1}{2m} \int_{-m}^{m} \varphi \alpha\, d\alpha + \frac{1}{m} \Sigma_1^\infty \int_{-m}^{m} \varphi \alpha \cos. i \frac{\pi(x-\alpha)}{m}\, d\alpha\,;$$

remplaçant m par l, on aura la formule (1).

La difficulté dont il a été parlé ci-dessus ne se présente pas, lorsqu'on veut obtenir directement la formule de Lagrange

$$(3) \quad \varphi x = \frac{1}{l} \Sigma_1^\infty \sin. i \frac{\pi x}{l} \int_{-l}^{l} \varphi \alpha \sin. i \frac{\pi \alpha}{l}\, d\alpha\,;$$

en effet, si dans l'équation

$$\varphi x = \frac{1}{\pi} \int_o^\infty \int_{-m}^{m} \varphi \alpha \sin. px \sin. p\alpha\, dp d\alpha,$$

dans laquelle m est une quantité infiniment grande, on remplace p par $i\frac{\pi}{m}$ et dp par $\frac{\pi}{m}$, on aura

$$\varphi x = \frac{1}{m}\Sigma_o^\infty \sin.\, i\frac{\pi x}{m}\int_{-m}^{m}\varphi\alpha \sin.\, i\frac{\pi\alpha}{m}\, d\alpha\,;$$

or, puisque le second membre s'évanouit par $i=o$, il viendra

$$\varphi x = \frac{1}{m}\Sigma_1^\infty \sin.\, i\frac{\pi x}{m}\int_{-m}^{m}\varphi\alpha.\, \sin.\, i\frac{\pi\alpha}{m}\, d\alpha\,;$$

formule qui représente la fonction φx pour des valeurs de x comprises entre $-m$ et $+m$, c'est-à-dire entre $-\infty$ et $+\infty$. Si donc on remplace m par une quantité finie l, on obtiendra la formule (5), qui subsiste pour des valeurs de x entre $-l$ et $+l$; mais qui devient nulle pour $x=o$ et $x=l$, et pour des valeurs de x non comprises entre les limites $-l$ et $+l$.

III.

Proposons-nous d'examiner, dans cette note, ce que devient la formule de Fourier et ses analogues, lorsqu'on différentie ou qu'on intègre les deux membres par rapport à la variable x. Nous croyons être parvenus, par de simples considérations géométriques, à des résultats que M. Poisson a déduits de l'analyse, et à des conséquences plus générales, qui ne paraissent pas avoir été signalées.

Considérons d'abord les formules qui résultent de la différentiation.

Si l'on différentie par rapport à x les deux membres de la formule de Fourier

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \varphi x = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\alpha \cos.\, p(x-\alpha)\, dp d\alpha\,,$$

la formule résultante

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \varphi' x = -\frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\alpha.\, p \sin.\, p(x-\alpha)\, dp d\alpha\,,$$

ne subsiste que pour les valeurs de x, pour lesquelles la fonction φx demeure continue et représente une même courbe.

En effet, en supposant qu'elle représente un lieu géométrique de la forme *fig.* 4, les formules (1) et (2) ne subsisteront pas pour les valeurs de x qui répondent aux abscisses op, op', op'', etc., ainsi que pour celles qui répondent aux extrémités de l'intervalle que l'on considère; dans tous ces cas, le coefficient différentiel $\varphi' x$ devient infini, parce que



la tangente aux points correspondants à ces abscisses est perpendiculaire à l'axe des x; ce qu'on peut d'ailleurs vérifier par la différentiation.

Si la formule (1) représente un lieu géométrique de la forme *figure* 5, elle subsistera pour les valeurs de x qui répondent aux abscisses op, op', op'', etc., mais la formule (2) n'aura pas lieu, parce qu'aux points correspondants à ces abscisses, on pourra mener deux tangentes, puisque deux arcs différents s'y réunissent.

Si ces deux arcs ont une tangente commune, la courbe présentera un point de rebroussement de la première espèce, et la tangente en ce point devra être perpendiculaire à l'axe des x; car autrement, la formule devrait donner, pour des abscisses immédiatement plus petites ou plus grandes, plus d'une ordonnée correspondante, ce qui ne peut être; donc, dans ce cas, la fonction $\varphi' x$ sera encore infinie. Il en sera de même pour les valeurs de x qui répondent aux limites du lieu géométrique.

Il suit de là que l'équation (2) ne subsistera qu'autant que la formule (1) représente une seule courbe continue entre les limites assignées à la variable; pour ces limites la fonction $\varphi' x$ sera infinie, à moins qu'elles ne fassent évanouir φx. Dans ce cas, la formule (2) ne subsistera pour ces limites qu'autant qu'elles feront aussi évanouir $\varphi' x$; ce qui aura lieu lorsque l'axe des x sera une tangente commune à la courbe à ses extrémités.

Si l'on veut que la formule (1) subsiste pour des valeurs de x entre β et β', et pour ces limites mêmes, on l'écrira comme suit :

$$\varphi x = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_\beta^{\beta'} \varphi\alpha \cos. p\,(x-\alpha)\,dp d\alpha$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_o^{\beta} \psi\alpha \cos. p\,(x-\alpha)\,dp d\alpha$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{\beta'}^{\infty} \Phi\alpha \cos. p\,(x-\alpha)\,dp d\alpha,$$

en supposant que l'on ait les conditions $\varphi\beta = \psi\beta$, $\varphi\beta' = \Phi\beta'$.

Cela étant, la dérivée

$$\varphi' x = -\frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_\beta^{\beta'} \varphi\alpha.\,p \sin. p\,(x-\alpha)\,dp d\alpha$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_o^{\beta} \psi\alpha.\,p \sin. p\,(x-\alpha)\,dp d\alpha$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_o^\infty\int_{\beta'}^{\infty} \Phi\alpha.\,p \sin. p\,(x-\alpha)\,dp d\alpha,$$

subsistera pour toutes les valeurs de x entre β et β'; mais pour ces limites, cela n'aura lieu qu'autant qu'aux points contigus des trois courbes que représentent les termes de la première formule, il y aura une tangente commune à deux courbes. Ce qui exige qu'on ait les nouvelles conditions $\varphi'\beta = \psi'\beta$, $\varphi'\beta' = \Phi'\beta'$.

Si nous considérons la formule

$$\varphi x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_\beta^{\beta'} \varphi\alpha \cos. p(x-\alpha)\, dp d\alpha$$
$$+ \tfrac{1}{2}\varphi\beta\left(1 + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin. p(\beta - x)}{p}\, dp\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\varphi\beta'\left(1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin. p(\beta' - x)}{p}\, dp\right),$$

qui a été donnée dans le n° X, sa dérivée subsistera pour les abscisses $x = \beta$ et $x = \beta'$, si les parallèles à l'axe des x représentées par les équations $y = \varphi\beta$ et $y = \varphi\beta'$ sont tangentes à la courbe à ses extrémités; ce qui exige qu'on ait les conditions $\varphi'\beta = o$, $\varphi'\beta' = o$.

On peut conclure de ce qui précède, que l'équation (2) subsiste pour toutes les valeurs de x pour lesquelles l'équation (1) a lieu; si celle-ci est vraie aux limites, l'équation (2) ne subsistera à ces limites qu'autant que certaines conditions seront remplies. Si la première n'a pas lieu pour ces valeurs extrêmes, le coefficient différentiel $\varphi'x$ sera infini pour les mêmes valeurs.

Supposons maintenant que l'on intègre les deux membres de la formule

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_\beta^{\beta'} \varphi\alpha \cos. p(x-\alpha)\, dp d\alpha,$$

par rapport à x, on obtiendra la suivante :

$$(4)\ldots\ldots\ldots \quad \int \varphi x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_\beta^{\beta'} \varphi\alpha. \frac{\sin. p(x-\alpha)}{p}\, dp d\alpha,$$

qui exprime l'aire de la courbe $y = \varphi x$, prise jusqu'à une abscisse quelconque x entre β et β'. Si l'on prend cette aire jusqu'à l'une des abscisses extrêmes $x = \beta$, $x = \beta'$, la formule (4) subsistera pour ces valeurs, quoique la formule (3) ne subsiste pas pour ces valeurs limites; ce qui résulte immédiatement du lieu géométrique de l'équation (3).

Les conséquences que nous venons de trouver relativement à la formule de Fourier, subsistent pour toutes les formules de la même espèce que nous avons fait connaître dans ce mémoire; et comme les raisonnements qu'il faudrait faire pour le démontrer ne diffèrent pas des précédents, je crois inutile d'entrer dans plus de détails.

FIN.

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR LES

DIVERSES ESPÈCES DE BROUILLARDS;

PAR

M. ATH. PELTIER.

(LU DANS LA SÉANCE DE L'ACADÉMIE DU 2 JUILLET 1842.)

MÉMOIRE

SUR

LES DIVERSES ESPÈCES DE BROUILLARDS.

1. La théorie des brouillards par simple refroidissement, est acquise à la science, depuis les recherches de De Luc [1], de H. Davy [2] et de G. Hervey [3], si l'on ne considère que la cause de la condensation des vapeurs à l'état neutre. En effet, pour produire ce phénomène, il suffit d'un abaissement dans la température de l'air de 2 ou 3 degrés au-dessous de celle de la surface des eaux ou des terrains humides, et le brouillard est d'autant plus épais, que cette différence entre la température de l'air et celle des eaux est plus grande. Les brouillards produits par le seul refroidissement de l'air, seraient donc un des phénomènes les plus simples et les plus uniformes, s'ils pouvaient toujours s'accomplir sous cette influence unique. Il n'en est point ainsi dans la nature, et cette simplicité de brouillards n'est presque jamais réalisée.

[1] *Recherches sur les Modif. de l'Atmosp.*, § 673.
[2] *Phil. Trans.*, 1819, Ire partie, et *Ann. de Chim. et de Phys.*, 1819, t. 12, p. 195.
[3] *Quarterly Journ.* et *Ann. de Chim. et de Phys.*, 1823, t. 23, p. 197.

2. La première cause de la complexité des brouillards, est la formation des vapeurs à la surface d'un corps chargé d'électricité résineuse, vapeurs qui participent conséquemment de cet état et qui sont résineuses comme lui. La seconde cause est dans la réaction des vapeurs résineuses du vaste courant qui s'avance constamment des tropiques vers les pôles, dans les hautes régions de l'atmosphère. Suivant la suprématie de l'une ou de l'autre de ces influences, les vapeurs interposées éprouvent des modifications très-diverses qui en font autant d'espèces différentes.

Dans un mémoire précédent[1], j'ai démontré toute l'influence du globe sur la production des vapeurs qui s'élèvent à sa surface et sur la distribution de leur électricité; mais, pour laisser à ce sujet toute sa simplicité, j'ai dû omettre l'influence du courant supérieur qui réagit contre l'influence terrestre dans sa progression au-dessus des régions extra-tropicales et qui vient ainsi ajouter des complications nouvelles au phénomène primitif, déjà très-compliqué par la seule influence terrestre. Dans le présent mémoire, je serai obligé de mentionner une partie des effets de ce courant supérieur, réservant la discussion de toute son action pour un travail spécial, dans lequel je suivrai la formation des nuages, leur distribution et leur transformation.

3. Quelles que soient nos réserves, il n'en résulte pas moins que l'abaissement de la température, en condensant les vapeurs, augmente leur conduction et facilite une nouvelle répartition électrique. Cette influence du globe, comme corps chargé d'une puissante électricité résineuse, a été méconnue jusqu'alors; mais nos expériences et nos observations ne permettent plus, je l'espère, cette omission; elles ont trop démontré combien cette influence est puissante sur la série des transformations des vapeurs, et combien les résultats en deviennent complexes. Les vapeurs ainsi chargées d'électricités différentes, ne sont plus soumises aux seules lois du refroidissement et de la pesanteur; l'action résineuse, soit du globe, soit du courant tropical, attire celles qui sont chargées d'électricité vitrée, et repousse celles qui sont char-

[1] *Mém. sur la cause des phénomènes électriques de l'atmos.* Ann. de Chim. et de Phys., 3e série, 1842, t. 4, p. 385.



gées d'électricité résineuse. De ces diverses influences, il résulte trois sortes de brouillards, qui se divisent en cinq espèces bien distinctes : la première est celle des brouillards simples; la seconde et la troisième sont celles des brouillards résineux; la quatrième et la cinquième sont celles des brouillards vitrés.

DES BROUILLARDS SIMPLES.

4. Les brouillards simples sont le produit de la condensation des vapeurs élastiques par le refroidissement de l'air, lorsque celui-ci est descendu de plusieurs degrés au-dessous de la température du sol qu'il domine; ils sont toujours humides et mouillent les corps froids qu'ils touchent. Ces brouillards paraissent vers la fin d'une belle journée, s'élèvent lentement dans l'atmosphère et se tiennent assez bas. Ils sont d'un blanc mat, diminuent la lumière sans la colorer, et leur surface est plane et tranquille.

Ces brouillards ne peuvent exister dans cet état de simplicité primitive que lorsque les vapeurs élastiques supérieures réagissent avec une tension résineuse égale à celle de la terre et neutralisent ainsi les effets de cette dernière. Cette égalité d'influences contraires se reproduit assez rarement, et rend cette espèce peu commune. Depuis longtemps on avait remarqué l'impossibilité d'expliquer tous les brouillards par cette seule cause, principalement ceux qui durent plusieurs jours pendant des froids continus, comme celui qui dura du 27 décembre 1813 au 2 ou 3 janvier suivant, au-dessus de Londres et de ses environs, avec une température qui oscilla entre + 1° C. et — 6°. Ce brouillard qui bornait l'horizon à quelques mètres, dura 8 jours, pendant un calme plat, et déposa une couche de neige assez épaisse. Sa formation et sa continuité ne sont pas comprenables, dit Th. Young [1], avec des différences de températures qui n'existaient pas alors. De tels brouillards ne peuvent se comprendre qu'avec la puissance d'une force nouvelle qui fait abaisser

[1] *Ann. of Philos.*, 1814, t. 3, p. 154.

successivement les vapeurs supérieures, quelles que soient les températures de l'air et du sol.

DES BROUILLARDS ÉLECTRIQUES.

5. Dès 1761, Th. Ronayne avait remarqué que certains brouillards étaient tellement électriques qu'ils pouvaient donner des étincelles [1]. Henley, qui continua ses expériences, rapporte beaucoup d'exemples de la grande tension qu'ils peuvent acquérir [2]. Depuis, l'électricité des brouillards a été constatée généralement; c'est un fait acquis à la science, et il est vraiment étonnant qu'on n'ait pas su reconnaître ensuite l'importance des modifications que la présence de l'électricité devait leur imprimer, même en méconnaissant l'influence terrestre. Cette coercition de l'électricité par les brouillards les divise nécessairement en deux sortes: ceux qui sont chargés d'électricité résineuse et ceux qui sont chargés d'électricité vitrée. Nous verrons que chaque sorte forme deux espèces distinctes.

DES BROUILLARDS RÉSINEUX.

6. Le globe terrestre étant un corps chargé d'électricité résineuse, les vapeurs qui s'en élèvent sont résineuses comme lui [3]; il semblerait alors que les brouillards de cette nature devraient être les plus nombreux et presque journaliers; il semblerait que le refroidissement des vapeurs élastiques résineuses devraient faire des brouillards résineux comme elles. Cette espèce n'est cependant pas commune, et l'on pourrait même dire qu'elle est rare, si on la compare à celle des brouillards vitrés. La cause de cette transformation de signes est dans la loi même des influences électriques; et, en effet, l'égale répartition électrique ne pourrait se conserver dans un air humide qu'autant que toutes les particules

[1] *Phil. Trans.*, 1772, vol., 62, p. 137, et *Jour. de Phys. Roz.*, 1774, t. 4, p. 14.
[2] *Id.*, 1774, vol. 64, p. 422, et *Jour. de Phys. Roz.*, 1775, t. 6, p. 252.
[3] *Mém. cité plus haut*, Ann. Ch. Phys., 3e *série*, t. 4.

de vapeurs seraient séparées par un isolant parfait qui ne permettrait aucune transmission électrique. Comme telle n'est pas la nature de l'air humide, l'égalité primitive est de courte durée. La conduction devenant plus grande par le refroidissement qui condense la vapeur, la terre repousse plus facilement l'électricité résineuse vers les couches élevées, et rend ainsi vitrée la couche rapprochée du sol; effet que l'électromètre mobile constate chaque jour vers le soir. Cette nouvelle distribution se fait d'autant mieux, que les vapeurs supérieures de l'atmosphère sont plus primitives et n'ont point encore une tension résineuse capable de réagir avec force contre celle du sol. Cette répulsion de l'électricité résineuse par l'influence du globe, ne permet jamais que les brouillards primitifs, ceux qui se forment par le seul refroidissement du soir, restent résineux. Pour qu'un tel brouillard puisse se maintenir en contact avec la surface du globe, il faut qu'une autre puissance l'emporte sur la répulsion de la terre, ou que cette répulsion terrestre soit atténuée par une force semblable, agissant en sens contraire. Le premier effet se produit par la pesanteur spécifique que prennent quelquefois les nuages, et le second par la puissance répulsive des couches supérieures fortement résineuses. Les brouillards résineux produits par ces deux causes, se distinguent par des qualités particulières qui en font deux espèces différentes.

7. *Des brouillards résineux de la 1re espèce.* — Les brouillards résineux, provenant de l'accroissement dans la pesanteur des vapeurs, ne sont qu'une nue résineuse abaissée par sa gravité jusqu'à la surface du sol, et non un *brouillard* proprement dit. L'abaissement d'une nue résineuse est toujours un phénomène orageux, tempêtueux et dès lors de courte durée; car la répulsion terrestre, s'opposant à la descente graduelle et moléculaire de ces vapeurs, elles n'arrivent près du sol qu'en masse, en vertu de leur poids et avec toute leur puissance électrique. Plus repoussées qu'attirées, ces nues effleurent les corps terrestres sans les mouiller, ou elles n'y déposent que l'humidité de leurs particules extrêmes. La neutralisation de ces nues surbaissées ne se fait pas par

un écoulement partiel, mais par la décharge de l'atmosphère électrique qui les entoure: c'est par les brusques agitations de l'air, par les bourrasques instantanées, que la neutralisation s'effectue. Aussitôt que la décharge a eu lieu, la répulsion diminue, les particules se condensent et se résolvent en une pluie abondante qui n'a cependant qu'une influence médiocre sur l'hygromètre. C'est dans l'automne et dans l'hiver qu'on voit le plus souvent ces gros nuages gris de plomb s'abaisser jusqu'à simuler un brouillard, et produire ces tourmentes atmosphériques qui servent d'intermédiaire à leur neutralisation. Dans les régions polaires, ces nues surbaissées sont très-communes et provoquent des tempêtes locales dont les limites sont très-rapprochées. W. Scoresby en cite de curieux exemples: tel est celui rapporté par son père [1]. Tous les bâtiments qu'il voyait dans son horizon étaient affectés différemment: les uns éprouvaient de fortes bourrasques; d'autres, peu éloignés, gardaient leurs voiles et ne ressentaient qu'une petite houle; d'autres enfin étaient au milieu d'un calme complet.

8. *Des brouillards résineux de la* 2me *espèce*. — Cette seconde espèce de brouillards résineux est la plus rare, surtout avec l'intensité suffisante pour être visible. Les états météoriques qui la préparent, coexistent rarement au degré nécessaire pour la produire d'une manière appréciable. Il en résulte qu'elle existe souvent sans être sensible à nos organes, et ne peut être manifestée que par des appareils électriques mobiles, qui indiquent une tension résineuse non motivée.

On sait qu'il existe un courant supérieur dans l'atmosphère qui s'avance de l'équateur vers les pôles et qui transporte au loin les vapeurs tropicales qu'il déverse le long de sa route, à mesure que la condensation s'effectue. En se condensant, ces vapeurs subissent toutes les influences résineuses du globe, et leur électricité se distribue en raison de l'énergie de cette influence. Les couches les plus élevées deviennent plus résineuses; les inférieures deviennent vitrées. Ces dernières, ainsi

[1] *Account of the arctic Regions, etc.*, vol. 1, chap. 5, sect. 6.

chargées d'électricité contraire à celle du globe, sont attirées; elles descendent, se rapprochent du sol; elles se neutralisent, soit par rayonnement avec les vapeurs résineuses inférieures, soit d'une manière brusque, lorsqu'elles sont massées en nuages; une grande partie se résout en pluie et laisse ainsi réagir les vapeurs résineuses supérieures avec toute leur énergie.

La démonstration de ces transformations ne peut faire partie de ce travail; il suffit de constater que les vapeurs supérieures possèdent une puissante tension résineuse, pour comprendre tous les effets d'influence de haut en bas sur les vapeurs qui s'élèvent chaque jour. La constatation de cette intensité de puissance résineuse se déduit de l'observation et de l'expérience, comme nous l'avons prouvé [1] en démontrant que toutes les vapeurs très-blanches et colorées étaient fortement vitrées et que celles qui sont brunes et gris de plomb étaient résineuses. Nous verrons tout à l'heure par la couleur des vapeurs inférieures combien celles qui font partie du courant tropical supérieur doivent être résineuses, pour produire ainsi par influence de telles masses de vapeurs colorées.

9. Lorsque les vapeurs supérieures possèdent une tension résineuse plus grande que celle de la surface du globe, elles réagissent sur les vapeurs inférieures qui s'élèvent, et y distribuent l'électricité en raison de leur suprématie d'influence; elles attirent l'électricité vitrée vers la partie supérieure, et repoussent l'électricité résineuse vers la partie inférieure. Si la densité donne aux vapeurs une conduction facile, l'électricité résineuse repoussée se dispersera dans le globe, et laissera l'électricité vitrée régner seule dans le brouillard qui en naîtra; c'est l'exemple du § 23 suivant; mais si, par l'effet de la température élevée, ou de leur rareté, les vapeurs inférieures ont peu de densité, la conductibilité sera faible, et elles pourront garder un certain temps l'électricité résineuse qui aura été repoussée. Cette portion inférieure de l'atmosphère possèdera alors une vapeur résineuse, raréfiée par la répulsion supérieure, raréfiée par celle du globe, et d'autant plus, que chacune des

[1] Mémoire précédemment cité, § 55.

particules aura conservé une plus grande tension électrique. Un nuage, comme un brouillard, est une agglomération de petits corps distincts, chargés de la même électricité et isolés les uns des autres par l'air interposé. Lorsque cette agglomération de petits corps électrisés est en présence d'un autre corps chargé d'une électricité dissemblable, leur influence respective étant atténuée, leur répulsion mutuelle est moindre; tandis qu'au contraire, si l'on approche un corps chargé de la même électricité, leur répulsion réciproque s'en accroît; elle devient plus grande encore, si on place de l'autre côté un second corps électrisé semblablement. On démontre parfaitement ce fait par l'expérience, en simulant une nue avec des parcelles de sureau isolées, suspendues par des fils de soie et près de laquelle on approche un, puis deux corps chargés de la même électricité qu'on leur a donnée préalablement. On voit toutes ces petites boules de sureau s'écarter l'une de l'autre, en raison de la proximité et du nombre des corps électrisés semblablement, de même qu'on les voit se rapprocher lorsque ces corps possèdent une électricité contraire.

10. Pour que des vapeurs résineuses soient maintenues près du sol, il faut donc 1° que les régions élevées de l'atmosphère soient le réceptacle de vapeurs fortement résineuses, possédant une réaction au moins égale à celle du globe; 2° que les vapeurs inférieures soient assez raréfiées pour être faiblement conductrices, et qu'elles puissent ainsi garder la tension résineuse qu'elles possèdent. Il faut la coexistence de ces circonstances pour que l'électricité résineuse de ces vapeurs inférieures ne s'écoule pas dans le globe, ou que ces vapeurs ne soient pas massées en nuages avec une périphérie électrique qui en faciliterait la décharge. Une des circonstances qui accompagnent toujours les vapeurs résineuses, c'est la couleur gris foncé, ou de fumée de charbon de terre; cette qualité spéciale des vapeurs résineuses les accompagne même lorsque leur dissémination les rend transparentes; on n'aperçoit aucune vapeur, cependant le ciel est obscurci, il est d'un bleu noir; les étoiles de petite grandeur disparaissent, et le soleil perd de son éclat et semble décoiffé de son auréole.

11. Les vapeurs supérieures étant transparentes, rien ne pourrait en faire soupçonner l'existence ni le signe électrique qu'elles possèdent, si les vapeurs de la région immédiatement inférieure n'en fournissaient pas l'indication par leur coloration. Des observations nombreuses nous ont démontré de la manière la plus péremptoire, que les vapeurs globulaires, dont la couleur varie du blanc mat au blanc vif d'argent, et que les vapeurs intermédiaires [1], de la teinte lie de vin au rouge écarlate, étaient chargées d'électricité vitrée à des degrés différents qui correspondaient à la vivacité de la blancheur d'une part, à l'intensité de la coloration de l'autre. Il résulte de cette coexistence de l'état vitré avec la blancheur, et surtout avec la coloration orangée des nuages, que les couches moyennes de l'atmosphère possèdent souvent une haute tension vitrée qui ne peut exister à cette distance de la surface du globe que par une puissance résineuse supérieure, et que l'intensité de cette dernière peut se préjuger par l'intensité de la coloration des couches subordonnées, comme on préestime la puissance de l'électricité d'un corps par celle de nom contraire qu'il développe sur un conducteur voisin.

Cette déduction de l'état résineux des couches supérieures est d'autant plus forcée, qu'en dehors de cette puissance, la tension vitrée des couches moyennes serait non-seulement un effet sans cause, mais un effet contraire à l'action de la terre qui attire l'électricité vitrée dans les couches les plus inférieures et repousse l'électricité résineuse dans les couches moyennes et supérieures, suivant leur conductibilité électrique. Nous verrons, dans un autre mémoire, comment ces vapeurs vitrées montant vers les vapeurs résineuses supérieures, les neutralisent et accélèrent leur résolution en pluie. Nous ne voulons constater ici que l'existence, dans certaines circonstances, d'une puissante tension résineuse dans les hautes régions de l'atmosphère, tension qui réagit avec suprématie contre celle de la terre et renverse la marche naturelle et primitive de la distribution de l'électricité, sous la seule influence résineuse du globe.

12. Il est encore plusieurs circonstances dont la coexistence est né-

[1] Voyez notre Mém. précité, § 55.

cessaire pour produire le phénomène que nous explorons : ainsi, il arrive souvent que les vapeurs résineuses inférieures, repoussées par les supérieures, ne descendent pas jusque près du sol ; il arrive qu'elles restent à une certaine élévation où la moindre température les condense en strates grises et minces.

Lorsque ces vapeurs sont assez repoussées pour s'approcher du sol, la température y étant plus haute et la répulsion plus grande, toutes les répulsions intérieures en étant augmentées, leur densité diminue, leur opacité s'affaiblit; elles deviennent demi-transparentes et jettent un voile obscur sur le ciel, sans qu'on puisse en apercevoir la cause ; elles forment une brume sèche qui tient les corps terrestres dans un état tout à fait anomal. Telle est la seconde sous-espèce de brouillards résineux qui ne paraissent que dans le printemps et l'été, tandis que la première appartient à l'automne et à l'hiver. Saussure cite un nuage de cette nature dans ses *Essais sur l'hygrométrie*, § 355, lorsqu'il dit : « On y voit nager une vapeur bleuâtre qui n'est pas une vapeur aqueuse, puisqu'elle n'affecte pas l'hygromètre, mais dont la nature ne nous est pas encore connue [1]. »

13. C'est à la première de ces deux sous-espèces de brouillards qu'il faut rapporter les brumes tempêtueuses des régions polaires et dont nous sommes parfois témoins en Europe, dans l'automne et dans l'hiver, comme le Havre en a eu un exemple le 18 janvier 1842. C'est à la seconde sous-espèce qu'appartiennent les brouillards secs résineux non massés en nuages et disséminés en une vaste brume qui noircit l'aspect du ciel sans qu'on puisse distinguer les vapeurs interposées. Ces brouillards appartiennent plus spécialement aux régions tropicales, et on en retrouve de nombreuses descriptions dans la relation des voyages de M. de Humboldt [2]. Enfin, il y en a à tous les degrés possibles, entre ces

[1] Nous devons rappeler que nos instruments ne marquent que des différences (Mém. cité, § 5) ; que la terre étant un corps puissamment résineux, la diminution de son influence sur l'instrument est la première manifestation d'une action résineuse venue d'en haut, et qu'il faut déjà une tension électrique extrêmement puissante dans les couches élevées pour réduire à zéro l'indication d'un instrument placé près du sol.

[2] T. 3, liv. 9, page 318, in-4°.

deux états extrêmes. Voici quelques exemples de la seconde sous-espèce, plus rare dans nos contrées que la première, et plus extraordinaire aussi lorsqu'on n'en connaît pas la cause.

14. « Le 1er juin 1721, on vit pendant presque toute la journée, à Paris et dans une grande étendue de pays, le soleil tout blanc, sans son éclat ordinaire, sans rayons, et pour ainsi dire décoiffé et ressemblant à la lune. La plupart des gens qui s'en aperçurent, même de ceux qui observent, n'y faisant pas grande attention, c'était sûrement le soleil obscurci, non pas par des nuages qui en eussent la forme, mais par un brouillard transparent, fort également répandu sur tout l'horizon. M. de Mairan observa ce brouillard à Breuil-Pont...., petit village sur l'Eure, entre Passy et Yvri, pendant la dernière heure...... Il dit que les bords du soleil étaient très-nettement terminés, nulle couronne autour du soleil, nulle dégradation de lumière, point de nuages, ni même de vapeur sensible; un fond de ciel d'un bleuâtre obscur, fort uniforme, et tel qu'il a coutume d'être dans une nuit claire aux endroits où il n'y a pas d'étoiles. Sur la fin du jour, des nuages sensibles passèrent devant le soleil, lui donnèrent pendant quelques moments une petite teinte de couleur rose, les bords demeurant bien tranchés sur le même fond uniforme, et enfin ils le cachèrent entièrement........ M. Cassini vit le même phénomène en Picardie, et M. De Louville a appris qu'on l'avait vu aussi en Auvergne et à Milan [1]. »

15. Voici un exemple tiré de Le Gentil [2]. — « C'était une chose très-sin-
» gulière que de voir l'horizon, le matin, avant que le soleil se levât....
» L'horizon était sans nuages et fort net en apparence, mais d'une cou-
» leur bleue si foncée et si obscure, qu'on eût dit que le soleil était
» encore fort loin au-dessous, lorsqu'il paraissait sortir subitement comme
» du fond du chaos, étant déjà de deux ou trois de ses diamètres au-dessus
» de l'horizon; il ressemblait à un feu qu'on aurait vu de loin; il continuait
» de se laisser voir pendant encore quelques minutes, comme on voit la
» lune se lever lorsqu'elle est pleine. Peu à peu les rayons prenaient de

[1] *Mém. Acad. Sci.* Paris, 1721, p. 25.
[2] *Le Gentil, voyage dans les mers de l'Inde,* 1, 625.

» la force, et faisaient sortir comme du fond d'un tableau quelques gros » nuages épars çà et là, qui se dissipaient bientôt entièrement. »

16. « Ce qui m'a frappé à Cumana, dit M. de Humboldt [1], c'est que peu de minutes avant que la pluie tombe, l'hygromètre à cheveu ne continue pas seulement d'indiquer 67° à 68°, ce qui est une sécheresse considérable pour ces contrées, mais que (sans aucun changement de température) il rétrograde vers la sécheresse, de 1 à 2 degrés, à mesure que le ciel s'obscurcit, et prend cette intensité de bleu noirâtre qui précède les explosions électriques. Le thermomètre baisse pendant la pluie de 24° R. tout au plus à 19°. Le ciel en s'obscurcissant reste uniformément bleu, ne montre pas de vapeurs divisées par groupes, et acquiert une intensité de couleur qui va jusqu'à 47° du cyanomètre. »

Enfin dans le 21e volume des *Annales de chimie et de physique,* page 411, M. Arago a inséré la relation d'un brouillard analogue, mais avec cette addition intéressante, que la masse de vapeurs n'étant pas excessivement étendue, on put en suivre la marche et la vitesse de progression.

Le 18 août 1821, M. Forster observa en Angleterre, dans le comté d'Essex, un brouillard remarquable. « Le soleil affaibli par ce brouillard, pouvait, à son lever, être regardé à l'œil nu, et avait une teinte argentée si semblable à celle de la soie vernie, que les paysans à la campagne le prirent pour un aérostat. (*Ann. Chim. Phys.*, t. 18, p. 419.) M. Howard observa ce phénomène dans le comté de Sussex, entre 9 et 10 heures du matin. A Paris, il se manifesta le même jour, mais seulement sur les 6 heures du soir. Nous avons déjà rapporté ces circonstances; nous n'en parlons de nouveau aujourd'hui que pour ajouter qu'à Viviers en Dauphiné (44° 29′ de latitude), un brouillard analogue, fumeux, blanchâtre, sec, couvrit aussi le ciel le 19 au soir; le lendemain matin, le soleil à son lever, parut blanc et sans éclat; le soir cet astre était rouge, suivant M. Flaugergues à qui nous empruntons ces détails. Ce brouillard, assez analogue à celui de 1783, ne

[1] *Voyage aux R. Eq.*, liv. 9, t. 3, p. 318, in-4°.

se dissipa entièrement que le 30 août, à la suite d'une petite pluie. »

17. Pendant le règne de ces brouillards secs et résineux, l'état électrique des corps vivants étant interverti, il peut en résulter des maladies spéciales s'ils durent longtemps. L'état habituel des corps placés à la surface du globe est d'être résineux, puisqu'ils forment les aspérités d'un corps résineux, en présence de l'état vitré de l'espace céleste. Lorsqu'un brouillard résineux surmonte la surface de la terre, son influence électrique rend vitrés tous les corps qui touchent au sol. Le globe, comme tous les vastes corps électrisés, permet une répartition inégale de son électricité propre, sous l'influence d'une nue résineuse. La partie placée immédiatement au-dessous de cette masse de vapeurs, devient *vitrée* par influence, si la tension de la nue est suffisante. Suivant cette tension, l'état naturel du sol est altéré, il est moins résineux, il peut être même vitré, et nous savons, par notre propre expérience, combien la présence d'un nuage résineux peut changer l'état normal.

18. C'est à cette espèce de brouillard que nous rapportons la brume qui accompagne le *chamsin* d'Égypte, le *semoun* d'Arabie, le *sirocco* d'Alger, le *solano* de Cadix, etc. L'aspect d'un ciel triste et terne, l'affaiblissement de cette brume en passant au-dessus des eaux, ses influences pernicieuses, tout prouve que l'atmosphère inférieure est chargée de vapeurs puissamment résineuses et dès lors très-dilatées. Lorsque le soleil est d'un rouge brun, c'est qu'il y a encore dans la région moyenne une couche quelque peu vitrée, mais de peu d'importance par rapport aux couches résineuses du courant tropical qui réagissent contre le sol. Le calme indique que ces vapeurs sont peu massées, que les molécules sont très-disséminées et conservent individuellement leur grande tension résineuse et ne forment pas de groupes ou nues entourées d'atmosphères électriques libres. Il en est ainsi incontestablement, car nous savons par nos observations, que si ces nues possédaient de l'électricité libre à leurs périphéries, elles produiraient des bouffées ou coups de vent en attirant l'air brusquement et en le repoussant ensuite, comme le démontrent les corps isolés placés entre d'autres corps chargés d'électricités contraires.

Nous nous bornerons, dans ce mémoire, à cette seule indication; ces vents sont un des sujets les plus intéressants du travail que nous préparons sur la cause des ouragans et des vents tempétueux [1].

Il y a donc deux espèces de brouillards résineux : la première provient d'une nue résineuse abaissée par sa pesanteur spécifique; la seconde est formée des vapeurs résineuses repoussées de haut en bas, par les tensions supérieures, non massées ou peu massées en nuages; elles sont disséminées et peu apparentes tout en noircissant le ciel.

DES BROUILLARDS VITRÉS.

19. Les brouillards chargés d'électricité vitrée sont de deux espèces, qui ont des résultats fort distincts. La première est celle qui a lieu sous un ciel serein, sans autre influence électrique que celle du globe. Cette espèce a ses portions inférieures plus vitrées que les supérieures, et elles sont puissamment attirées par le globe. L'autre espèce est celle qui est formée sous l'influence de masses de vapeurs fortement résineuses qui dominent dans les couches supérieures. Cette dernière a ses portions supérieures plus vitrées que les inférieures.

20. *Brouillards de la* 1re *espèce.* — Sous un ciel pur et serein, la vapeur condensée en brouillard se trouve placée sur-le-champ entre l'influence vitrée de l'espace et celle du globe terrestre, qui est de nature contraire. En raison de sa conductibilité, la couche supérieure se charge d'une tension *résineuse* et l'inférieure d'une tension *vitrée*. La superficie des brouillards, comme celle des nuages, comme celle de tout liquide placé entre deux corps chargés d'électricités différentes, passe avec plus de facilité à l'état de vapeurs élastiques. On voit la portion supérieure des brouillards dans une agitation perpétuelle : elle se moutonne, les flocons se repoussent, s'élèvent, disparaissent dans l'atmosphère supérieure. C'est ce que De Saussure a observé sur le col du Géant, lorsque les vapeurs formées au fond des vallées

[1] Consultez le *Voyage de Denon en Égypte*, t. 1, p. 353, et t. 2, p. 163, éd. 1829. E. Ruppel, dans la *Corresp. de Zach.*, t. 7, p. 532, et M. Ledinghen dans le *Compt. rend. Acad. Sc.*, 1840, t. 11, 822.



s'élèvent assez pour être dégagées des influences latérales des montagnes. « On les voyait, dit-il, se diviser en filaments qui, semblables à ceux d'une houppe de cygne qu'on électrise, semblaient se repousser mutuellement en produisant des tournoiements et des mouvements si bizarres, si rapides et si variés, qu'il serait impossible de les décrire [1]. » Cette transformation faite sous l'influence vitrée de l'espace, donne à la vapeur élastique une tension résineuse plus considérable, et laisse aux vapeurs inférieures un état vitré proportionnel.

21. Dalton observa le même phénomène au-dessus des brouillards : « En remontant plus haut dans la vallée, les parties de la rivière abri» tées étaient couvertes de brouillard ; celui-ci, en s'élevant, disparais» sait aussitôt qu'il atteignait la région où le vent se faisait directement » sentir ; il offrait alors de légères stries qui ne dépassaient jamais une » certaine hauteur et se dissipaient en peu de secondes [2]. » Les stries s'élevant à une certaine hauteur, ne pouvaient être le produit du vent, puisqu'elles étaient droites, comme les panaches de la trombe de Nice du 6 janvier 1789 étaient restées droites, malgré la violence de la tempête [3].

M. Boussingault, dominant le brouillard qui existe pendant toute la saison d'hiver au-dessus des plaines du Pérou, voyait également la superficie s'allonger en lambeaux déchiquetés et disparaître peu à peu. M. Alcide D'Orbigny les a vus aussi s'allonger en stries, se détacher et disparaître en vapeur élastique. La superficie de ces brouillards se renouvelle donc, et leur transformation se faisant sous l'influence de l'état vitré du ciel, emporte avec elle l'état résineux et laisse au brouillard inférieur l'état vitré, état que les vapeurs inférieures conservent plus ou moins suivant leur conductibilité.

Ronayne avait déjà observé, en 1770, que les brouillards qui se traînaient à terre ne donnaient pas d'électricité, tandis que ceux qui étaient plus élevés en donnaient beaucoup [4]. En effet, les brouillards étant vitrés,

[1] *Voyages aux Alpes*, § 2071.
[2] *Phil. Tr.*, 1819, 1re partie; *Ann. Ch. Phys*, 1819, t. 12, p. 204.
[3] *Observations et Rech. exp. sur la formation des trombes*, §§ 217 et 225.
[4] *Lettre de Ronayne à Franklin.* Jour. Phy. Rozier, 4. 16, année 1774.



sont attirés par la tension contraire de la terre; ils s'en approchent, y déchargent leur électricité, s'y déposent peu à peu et mouillent tous les objets qui font saillie.

22. Les corps élevés se mouillent différemment suivant leur conductibilité électrique et la tension résineuse qu'ils possèdent. Lorsqu'ils sont bien dégagés de ceux qui les entourent et qu'ils forment une saillie du globe, l'eau déposée n'y reste pas; elle se revaporise immédiatement. Placée sur un corps résineux, cette eau facilite le rayonnement électrique du globe, l'échange entre les deux tensions opposées se fait rapidement, comme il est facile de le prouver par une expérience directe, et elle repasse ainsi sur-le-champ à l'état de vapeur élastique, emportant l'électricité résineuse et neutralisant les vapeurs voisines. Beaucoup d'observateurs avaient remarqué la différence de mouillage qu'éprouvent certains corps; mais ils n'avaient pas su en apprécier la véritable cause, celle d'une meilleure conductibilité électrique et une exposition qui leur donne une tension résineuse plus grande. C'est ainsi qu'on voit une tablette en bois élevée de quelques décimètres au-dessus d'une autre tablette du même bois, n'être nullement mouillée, tandis que l'inférieure l'est complétement : c'est que, plus élevée, elle a une tension plus grande; elle rayonne plus facilement son électricité résineuse vers les vapeurs vitrées qui l'entourent; elle la rayonne par l'intermédiaire des particules d'eau qui repassent à l'état de vapeur élastique. Les métaux, meilleurs conducteurs que le bois et la terre, conserveront moins encore l'humidité déposée, à moins qu'ils ne soient dominés par d'autres corps qui rayonnent avec facilité l'électricité résineuse du globe et neutralisent les vapeurs ambiantes.

23. Ces brouillards peuvent se former au-dessus des terres humides d'où s'échappe la vapeur, ou bien leur formation ne se fait qu'à une hauteur considérable. Les vapeurs qui ne rencontrent qu'à cette élévation l'abaissement de température nécessaire à leur transformation, forment d'abord des strates opaques peu épaisses où l'électricité se distribue comme dans le premier cas. La couche inférieure est vitrée par l'influence du sol; la couche supérieure est *résineuse :* une partie repassant

à l'état de vapeur élastique, emporte avec elle l'électricité résineuse supérieure, et laisse l'électricité vitrée dans les couches inférieures; plus attirées alors par la terre, ces strates descendent peu à peu et forment un brouillard très-*vitré* et très-humide. Tous les lieux élevés en sont mouillés, et l'hygromètre marche vers 90 à 95 degrés.

Ces brouillards ne diffèrent que par le lieu de leur formation et de leur condensation; l'un se forme autour de nous, l'autre se forme plus haut et descend ensuite sur nous: beaucoup d'entre eux affectent l'organe de l'odorat et donnent la sensation de *gaz nitreux*. Je me contenterai d'en citer un exemple: « Le 21 mai 1822, dit M. Arago [1], sur les 5 heures du soir, il se répandit tout à coup dans l'air, à Paris, un brouillard d'une nature particulière et à travers lequel on voyait le soleil du rouge le plus vif. Ce brouillard avait une odeur très-prononcée de gaz nitreux; il fut observé presqu'au même instant, dans un rayon de huit à dix lieues autour de la capitale; il avait partout les mêmes propriétés. Il se dissipa entièrement à Paris vers les 10 h. ½ du soir.

» Ce brouillard n'a exercé aucune action appréciable sur une aiguille aimantée suspendue à un fil de soie sans torsion. »

24. *Brouillards vitrés de la 2e espèce.* — Les brouillards vitrés dont nous venons de parler sont nécessairement humides; aucune autre force ne contrebalançant l'attraction du globe, chacune des particules vitrées est attirée, et lorsque l'attraction l'emporte sur leur légèreté spécifique, elles viennent se déposer sur le corps attirant; mais cet état de simplicité n'existe pas toujours : il y a souvent une action en sens contraire dans les régions supérieures qui vient en changer les résultats. Lorsque les vapeurs supérieures possèdent une tension résineuse assez puissante pour réagir contre le sol avec supériorité, leur influence prépondérante rend la surface du sol neutre ou même vitrée, et la masse de vapeurs qui s'élève obéit à cette suprématie d'influence. Vers le soir, lorsque l'abaissement de la température fait condenser les vapeurs de la journée, et que le brouillard se forme dans les circonstances que nous venons d'indi-

[1] *Ann. Ch. Phys.*, 21. 412.

quer, c'est la partie supérieure du brouillard qui est le plus vitrée, et non l'inférieure comme dans l'espèce précédente. On voit ce brouillard s'élever en stries roussâtres et se perdre dans l'espace en repassant à l'état élastique. Ce n'est plus une brume terne comme celle des brouillards résineux, c'est une vapeur plus ou moins colorée qui s'élève, se digite, se ramifie et disparaît : suivant l'énergie de sa tension vitrée, sa couleur passe de la teinte lie de vin pâle au rouge le plus vif. L'attraction prédominante des masses de vapeurs résineuses supérieures ne permet pas aux particules humides de se déposer sur les corps terrestres, devenus eux-mêmes moins *résineux* et moins attirants. Elles s'élèvent, et ces vapeurs opaques, toutes vitrées qu'elles sont, forment un brouillard peu mouillant, souvent même un brouillard très-sec, mais d'une nature toute différente de celle qui provient des vapeurs résineuses. Les électromètres qu'on élève au milieu de ces brouillards roux indiquent une puissante tension vitrée ; ils obéissent au brouillard qui les entoure préférablement à l'influence *résineuse* des vapeurs supérieures trop éloignées. Dans les régions tropicales où les couches moyennes de l'atmosphère sont si puissamment chargées de vapeurs résineuses, ces brouillards roussâtres apparaissent souvent, et M. de Humboldt les a observés un grand nombre de fois.

25. En résumé, les masses de vapeurs résineuses rendent *vitrés* les brouillards qui se forment sous leur influence, et la surface du sol en est elle-même moins *résineuse*. Les particules vitrées de ces brouillards ne sont plus attirées par les corps terrestres ; elles n'y vont plus déposer leur charge électrique, ni leurs molécules aqueuses ; elles ne mouillent plus. En s'élevant dans l'espace, ces brouillards atteignent les vapeurs résineuses supérieures ; ils en neutralisent en partie l'électricité, et les rendent ainsi moins répulsives entre elles et moins repoussées par le globe terrestre. Le résultat de cette moindre répulsion des vapeurs supérieures est une condensation et par suite une résolution en pluie d'une portion de leur masse. Ces brouillards, roux dans leur partie supérieure et ramifiés en un chevelu allongé, sont un signe d'altération du temps à la suite des beaux jours, et ils annoncent la marche des vapeurs vers une résolution plus ou moins rapprochée. Nous citerons les brouillards à stries



rousses et ne mouillant pas, du 28 novembre 1840, du 1er et du 9 décembre suivant, qui furent suivis de grandes pluies. Parfois la pluie ne tombe pas dans les localités où on les a remarqués, mais dans les lieux où le vent pousse les nues résineuses supérieures. Il y a à cet égard une différence notable entre le résultat de l'automne et celui du printemps: dans le premier cas, le refroidissement de l'atmosphère allant en augmentant, toute neutralisation électrique des vapeurs ajoute au refroidissement pour provoquer une résolution en pluie; tandis qu'au printemps, la température s'élevant, la capacité de l'air s'en accroît, les vapeurs rousses ou rouges du soir atténuent bien alors la répulsion et la raréfaction des vapeurs supérieures, mais souvent sans pouvoir l'emporter sur l'effet contraire dû à la température.

Il y a des exemples de ces brouillards roux d'une étendue considérable et qui ont duré plusieurs mois; tel est celui de 1783 dont il existe de nombreuses relations [1].

26. Le brouillard qui accompagne le *harmatan* (vent de l'intérieur de l'Afrique, sur la côte occidentale) me paraît être de cette seconde espèce, d'après les signes extérieurs qui le distinguent. On sait par le rapport des voyageurs [2] que, pendant la durée de ce vent, l'évaporation est telle que toutes les plantes se dessèchent, que les hommes en ressentent un froid piquant, produit par la vaporisation trop rapide des fluides. Cette prodigieuse évaporation ne peut être spontanée, puisqu'à peine les vapeurs sont-elles formées, qu'une température de 25° à 27° C. n'est plus suffisante pour les conserver à l'état élastique, qu'elles se globulisent en un brouillard durable et tellement épais, qu'il intercepte parfois la vue d'un fort placé à 400 mètres. Pour qu'une condensation aussi grande puisse se produire d'une manière continue, il faut que l'évaporation soit activée par une puissance autre que celle de la température; il faut qu'elle attire dans l'atmosphère une masse de vapeurs qui ne peut s'y maintenir à l'état élastique. Ces vapeurs opaques ou demi-transpa-

[1] *Journ. Ph. Rozier*, t. 24; *Mém. de la Société des Sc. Phys. de Lausanne*, 1783, t. 1, p. 110; Kæmtz, *Meteorol.*, 3. 198, *etc.*

[2] D'Obson, *Phil. Trans.*, 1781, p. 46, et *Journ. Phys. Roz.*, 1782.

rentes teignant la lumière en roux et desséchant tous les corps, possédant nécessairement, d'après nos observations, une haute tension vitrée, sont conséquemment le produit de l'influence des masses de vapeurs répandues dans les couches élevées chargées d'une tension résineuse supérieure à celle de la terre.

Nous réservons les détails que comporte ce sujet, comme nous avons réservé ceux du *chamsin* et du *semoun*, pour un travail spécial sur la cause des ouragans et des vents tempêtueux.

27. Contrairement aux brouillards *résineux* qui ne se limitent qu'imparfaitement, les brouillards vitrés, comme les nuages de même nature, se limitent bien : la limitation de leurs bords est d'autant mieux tranchée que leur tension vitrée est plus grande. Ce fait s'observe sur une grande échelle pendant la saison des orages. On voit les nuages blancs et clairs se terminer d'une manière aussi distincte que s'ils étaient formés de substances solides, tandis que les strates grises qui les accompagnent sont baveuses et déchiquetées. Les divers groupes vitrés, massés en un cumulus, ont aussi leurs bords nets et bien dessinés. Cette limitation des vapeurs se remarque même quelquefois dans les brouillards qui cheminent à la surface du sol [1]. J'en citerai quelques exemples. Dans leurs excursions à la cime de la Silla de Caracas, le 22 et le 27 décembre 1797, MM. de Humboldt et Bonpland [2] furent enveloppés d'une brume qu'ils virent se diviser en petits nuages à contours déterminés et qu'ils attribuaient à de petits courants d'air locaux, parce qu'ils voyaient serpenter les éclaircies qui se formaient et séparaient en groupes distincts la masse uniforme qui était montée de la vallée. Ces groupements se formèrent au moment où la superficie de la brume fut assez élevée pour être dégagée des influences latérales de la montagne et ne recevait plus que celle de l'espace supérieur. L'influence positive d'une part et négative de l'autre, distribuant inégalement l'électricité, les parties de la brume moins denses s'en chargèrent davantage et séparèrent bientôt par répulsion les vapeurs en flocons distincts. Aussi trouvèrent-ils

[1] *Journal Phys.*, an 7 (1799), tom. 48, p. 189.

[2] *Voyage aux Rég.*, in-4°, t. 1, liv. 4, ch. 13, p. 607.

des signes alternatifs d'électricité positive et d'électricité négative.

De Saussure a vu la même chose au col du Géant [1]; il en donne une mauvaise explication; mais ici nous n'avons besoin que de constater ce fait. Ronayne a vu également le floconnage des brouillards vitrés [2]. Du reste, chacun a pu en voir dans la campagne, et même ils ne sont point inconnus au milieu des grandes villes. Nous en avons vu un bien limité en 1840 sur un des boulevards de Paris, et M. Breguet fils en vit un sur la Seine le 28 janvier 1842, qui réfléchissait toutes les maisons du quai de la Mégisserie, comme un corps plan un peu mat. Ces exemples, que beaucoup d'observateurs ont constatés, indiquent que les vapeurs peuvent se limiter d'une manière nette par une puissance de répulsion électrique du dehors en dedans, comme l'observation et l'expérience nous l'ont montré. C'est à cette même cause que nous rapportons le fait observé par Don Ant. Ulloa [3]; seulement l'état des particules de vapeurs était tel dans ce dernier cas, que ce n'était plus une vapeur globulaire proprement dite, mais une surface formée de particules liquides et maintenues à une hauteur de quelques mètres. Ramond a vu un phénomène analogue dans les Pyrénées [4], et Scoresby en cite de semblables dans les régions polaires [5]. C'est un sujet sur lequel je reviendrai en traitant des vapeurs et des nuages d'une manière spéciale.

28. Il nous reste une question fort importante à résoudre, c'est celle qui traite de l'influence des brouillards électriques sur les plantes et les animaux; mais nous manquons d'observations exactes pour l'aborder actuellement. Parmi les observations qui ont été faites sur les brouillards dans leur relation avec la végétation, les unes ne contiennent que la seule indication d'une tension électrique, sans spécifier le signe ni l'intensité; d'autres indiquent que des maladies ont suivi la présence des brouillards, sans dire s'ils étaient électriques ou non. Tout est donc à

[1] *Voyage aux Alpes*, 2071 et 2072.

[2] *Journ. Phys. Roz.*, in-4°, 1774, 17.

[3] *Voyage hist. de l'Amér. mérid. et au Pérou*, 1re partie du livre 6, chap. 9.

[4] *Mémoire sur la Végétation au sommet du Pic du Midi. Lettres publiées en* 1834 *à Toulouse*, 8, p. 32.

[5] *Account of the artic. etc.*, ch. 5, sect. 5.

faire dans cette voie, et si quelques agronomes instruits voulaient suivre la marche des brouillards en les interrogeant avec l'électromètre, d'après la méthode que nous avons indiquée, on saurait, dans un petit nombre d'années, qu'elle est la véritable cause de certaines altérations dans les végétaux et peut-être de certaines maladies qui affligent tout à coup l'homme et les animaux. Ne pouvant nous baser sur des faits précis, nous allons indiquer en quelques mots ce que la théorie fait prévoir.

29. Lorsqu'une nue vitrée s'abaisse jusque près du sol, toutes les aspérités conductrices servent d'intermédiaires pour en neutraliser l'électricité. Les animaux et les végétaux imbibés de liquides conducteurs et s'élevant au-dessus du sol, servent de pointes rayonnantes entre la terre et le brouillard. Les végétaux pénétrant dans le sol jusqu'à la terre humide et s'élevant et se ramifiant en pointes ou en aspérités, sont des corps très-propres à remplir cet office, suivant le degré de leur conductibilité. On a des milliers d'exemples que, dans les orages, les arbres ont servi de conducteurs aux décharges de la nue et ont conservé les stigmates de leur violence. Les végétaux ne sont conducteurs que par la séve qui les pénètre; conséquemment tout courant électrique peut en altérer la nature par trois moyens: le premier, c'est que tout courant traversant une dissolution, en rend l'extrémité acide ou alcaline suivant le sens; ainsi les feuilles et les fleurs peuvent être altérées de deux manières: elles peuvent être plus acides ou plus alcalines, suivant l'influence vitrée ou résineuse du brouillard ou de la nue. La seconde sorte d'altération que doivent subir les plantes, puisqu'elles sont des corps humides, c'est que le rayonnement électrique ne se fait par leurs extrémités qu'en emportant une partie de leur humidité; la séve s'évapore et transporte l'électricité contraire qui doit neutraliser celle du brouillard, comme l'eau d'une capsule ou d'un étang s'évapore bien plus rapidement sous l'influence électrique. Si l'influence est puissante, le courant et par suite l'évaporation sera considérable, et la plante sera desséchée comme nous en avons vu de si prodigieux exemples à la suite de la trombe de Chatenay [1], et comme le produit aussi le vent du *helm*,

[1] *Observ. et Recher. etc., sur les trombes.*

lorsqu'il a quelque durée [1]. Enfin le courant peut acquérir une telle intensité par le passage de la foudre ou l'écoulement prolongé de l'électricité, que toute la séve se vaporise, qu'elle brise les parois qui la retiennent et divise le ligneux en une quantité considérable de filaments, comme on en connaît une foule d'exemples par la foudre, et comme la trombe de Chatenay en a fourni à elle seule 850 exemples.

30. Plusieurs agriculteurs ont pensé que les brouillards secs rouillaient les blés, et Duhamel a dit que cet effet arrivait principalement lorsque la plante était dans la force de la végétation [2], et non lorsqu'elle n'avait plus d'humidité dans son tissu. Ces deux observations réunies prouvent que la rouille de Duhamel est un produit du courant électrique, puisqu'elle a lieu à la suite des brouillards secs et qu'il faut que la plante soit conductrice par l'humidité qu'elle contenait avant l'influence du brouillard. Une autre observation de M. Lemaître, c'est qu'une fumée épaisse produite par la combustion d'herbe humide, protége le champ sur lequel se répand cette fumée conductrice de l'électricité. Ce qui a été un obstacle à ce genre de recherches, c'est l'abus qu'on a fait de la liaison observée entre la rouille et les brouillards secs, et on a voulu ensuite rapporter aux brouillards électriques toutes les autres maladies des plantes. L'observation n'ayant pas confirmé cette extension abusive d'une bonne observation, on a délaissé ce genre de recherches et un beau sujet d'observations. Nous engageons les agriculteurs instruits à les reprendre et à observer si les plantes les plus élevées ne sont pas plus susceptibles de prendre la rouille après les brouillards électriques, que les plantes basses et abritées, et à examiner la perte de la séve faite par les plantes roussies, comparativement aux plantes voisines restées vertes. Nous reviendrons ailleurs sur cette question agricole, et nous indiquerons des moyens propres à la préservation des plantes de cette influence.

[1] *Compte rendu de la 9e réunion de l'association Brit.*, 1838, p. 33 des notices.

[2] *Eléments d'agriculture*, éd. de 1779, liv. 3, ch. 3. *Voyez* aussi les *Mémoires de Tillet, de* 1773 *et* 1774. L'opinion de Fagou dans *l'Hist. Ac. Sc.*, 1710, p. 62; le *Traité uranographique* de M. Phillipar, in-8°, 1837, et les *Mémoires* de M. Turpin, *sur les maladies des plantes*.

FIN.



RECHERCHES

SUR LA

CROISSANCE DU PIN SYLVESTRE

DANS LE NORD DE L'EUROPE,

PAR

A. BRAVAIS ET CH. MARTINS,

MEMBRES DE LA COMMISSION D'HISTOIRE.



RECHERCHES

SUR

LA CROISSANCE DU PIN SYLVESTRE

DANS LE NORD DE L'EUROPE.

Pendant notre séjour auprès de l'établissement métallurgique de Kaafiord en Finmark (lat. 69°57′ N.; long. 20°40′ E.), nous fûmes frappés du peu d'épaisseur des couches annuelles de quelques Pins sylvestres, qui avaient été abattus pour les besoins de l'usine. Elle était telle que nous ne pouvions les distinguer nettement qu'en faisant usage de la loupe. Nous résolûmes de les compter et de les mesurer sur un certain nombre de troncs, et de recommencer ce travail à diverses latitudes, pendant notre retour vers la France. Notre but était de découvrir les lois de l'accroissement du Pin sylvestre sous des latitudes variables, depuis le 50ᵉ jusqu'au 70ᵉ parallèle. Cette recherche nous paraissait d'autant plus intéressante que, dans aucun autre pays, le Pin n'atteint le 70ᵉ, et que nous pouvions étudier son développement sur des individus qu'on regarde comme les sentinelles avancées de la végétation forestière; car le Pin sylvestre ne dépasse pas cette

latitude en Finmark non plus que l'Aune (*Alnus incana*, Wahlb.), le Tremble (*Populus tremula*, L.) et le Sorbier des oiseleurs (*Sorbus aucuparia,* L.). Le Bouleau blanc et quelques Saules sont les seuls végétaux ligneux qu'on trouve aux environs d'Hammerfest, à 40 minutes plus au Nord. Parmi tous ces arbres, le Pin se distingue par son éminente utilité; seul dans ces régions glacées, il peut être employé comme bois de construction. Le Pin scandinave possède à un haut degré les qualités requises pour cet emploi, et celles plus précieuses et plus rares que réclame l'architecture navale. Sous ce point de vue, les marins le préfèrent beaucoup au Sapin (*Abies excelsa,* Poir.— Gran. *Norveg. et Sued.*), qui lui dispute le domaine des immenses forêts de la Péninsule. Dans les chantiers, le Pin (*Pinus sylvestris,* L. — Fichte, *All.*, Tall. *Sued.*, Fyr. *Norveg.*) se reconnaît à son bois rougeâtre, à son écorce de même couleur, formée de plaques rhomboïdales fort épaisses et à son aubier blanchâtre. Dans la marine, il est principalement travaillé pour les pièces peu courbes de la membrure, les bordages et la mâture. Aussi droit que le Sapin, il est moins putrescible et acquiert les mêmes dimensions. Le Sapin a un bois blanchâtre d'un grain plus fin: on le préfère pour les boiseries, parce qu'il devient plus lisse sous le rabot que le bois du Pin. A défaut de ce dernier, on l'emploie en marine pour faire des vergues et des épars.

Les Pins que nous avons mesurés à Kaafiord, provenaient des environs de l'usine; ceux que nous trouvâmes dans les chantiers d'Haparanda, avaient été coupés l'année précédente sur les bords du fleuve Torneo, auprès du village de Pello (lat. 66°48′; long. 21°40′ E.), qui forme l'extrémité septentrionale de la triangulation de Maupertuis. Les Pins de Geffle (lat. 60°40′; long. 14°50′ E.) provenaient de forêts de l'intérieur, situées sous le même parallèle, à moins de trois ou quatre myriamètres de distance. Ils avaient été réunis dans un chantier de constructions navales. A Halle (lat. 51°30′; long. 9°40′ E.), nous mesurâmes des souches qui avaient survécu à l'abatage dans la forêt de Giebichenstein, peu éloignée de la ville. Qu'il nous soit permis de remercier ici MM. Crowe, Jhle, Sundell, Elfbrink et de Münck-

hausen, pour l'obligeance avec laquelle ils ont bien voulu faciliter nos recherches dans chacune de ces quatre stations.

Parmi les arbres coupés, nous choisissions ceux dont les couches étaient les plus distinctes, et dont le centre n'avait pas été attaqué par l'humidité. Pour compter et mesurer les couches, nous avons employé le procédé recommandé par M. de Candolle [1]. Après que la hache avait régularisé la section, nous appliquions sur elle une bande de papier fort, dans la direction du centre à la circonférence : nous y marquions successivement par un trait fin le centre d'abord, puis les couches dont nous voulions connaître la position (de 25 en 25 ordinairement), et enfin, la dernière couche avec l'indication de son numéro d'ordre, qui nous donnait l'âge de l'arbre.

Presque toujours les sections étaient obliques, ce qui provenait du procédé d'abatage usité par les bûcherons suédois : ainsi la mesure originale ayant été prise le plus souvent sur une section oblique à l'axe du tronc, il fallait la réduire à ce qu'elle eût été sur une section perpendiculaire à ce même axe, afin que les arbres fussent comparables. Pour cela, nous avons toujours mesuré le diamètre ou la circonférence du tronc dépouillé de son écorce, et il a été facile de réduire les coupes obliques à des coupes normales. Autre difficulté : dans la section d'un tronc, le centre de l'arbre indiqué par la moelle n'occupe pas toujours le centre de figure; dans ce cas nous avons néanmoins fait nos mesures sur un rayon partant de la moelle, et dont le choix était déterminé par la netteté des couches. Mais nous avons réduit les longueurs ainsi mesurées à ce qu'elles eussent été sur un arbre de même diamètre et parfaitement cintré.

Les tableaux I, II, III et IV présentent les résultats de nos mesures réduites d'après ces principes. Chacun des nombres de ces tableaux indique la quantité dont le demi-diamètre s'est accru en 50 ans, à Kaafiord; en 25 ans, à Pello et à Geffle; en 10 ans, à Halle. Au moyen de ces tableaux, nous en avons construit d'autres indiquant

[1] *Notice sur la longévité des arbres*, Bibliothèque universelle, mai 1831.

au bout des mêmes périodes de temps, non plus les croissances successives, mais les rayons correspondants qui représentent la somme de toutes les croissances antérieures. Nous avons supprimé ces tableaux, mais le lecteur pourra facilement les reconstruire au moyen des tableaux existants. Nous les nommerons tableaux I nº 2, II nº 2, III nº 2, IV nº 2, et rien n'empêche de les supposer rétablis.

Cherchons maintenant à déterminer la grandeur du *rayon moyen* des Pins de Pello, par exemple, au bout de 25 ans, au bout de 50 ans, de 75 ans, de 100 ans, et ainsi de suite, afin de nous faire une idée de la quantité de leur accroissement dans un temps donné. Par rayon moyen, nous entendons une moyenne arithmétique entre les rayons d'un grand nombre d'arbres du même âge. Pour l'obtenir, nous avons pris dans chaque colonne du tableau II les épaisseurs moyennes $36^{mm},61$; $35^{mm},01$; $23^{mm},21$....... pour chaque période de 25 ans [1]. La longueur $36^{mm},61$ représentera donc le rayon moyen au bout de 25 ans. De même $36^{mm},61 + 35^{mm},01 = 71^{mm},62$ sera le rayon moyen au bout de 50 ans. $71^{mm},62 + 23^{mm},21 = 94^{mm},83$ sera le rayon moyen à l'âge de 75 ans, et ainsi de suite. Le tableau V renferme les rayons moyens ainsi obtenus sous le titre de *rayon moyen* [2].

I. — LOIS DU DÉCROISSEMENT DE L'ÉPAISSEUR DES COUCHES.

Les épaisseurs moyennes des couches annuelles décroissent assez régulièrement. Il arrive cependant quelquefois qu'une de ces épaisseurs se trouve plus forte que celle qui la précède immédiatement. Ceci arrive surtout pour les moyennes déduites d'un petit nombre d'observations. La moyenne 125 à 150 du tableau II, est un peu plus forte que la moyenne précédente; anomalie remarquable à cause du grand nombre d'arbres dont ces moyennes dérivent. Mais il faut remarquer : 1º que dans tous les cas pareils le décroissement reprend

[1] Voyez la note A.
[2] Voyez la note B.

bientôt sa loi habituelle ; 2° que les grandes irrégularités de croissance qu'offrent la plupart des arbres considérés individuellement, ne se compensent pas toujours dans les moyennes. Si la plupart d'entre elles représentent fort exactement l'état moyen, il en est aussi quelques-unes qui ne le représentent pas aussi bien. Ainsi ces résultats n'ont rien que de fort naturel et de conforme à la théorie générale des chances variables.

La loi du décroissement se révèle au milieu de ces inexactitudes locales, lesquelles auraient sans doute disparu, si au lieu d'examiner 20 ou 30 arbres dans chaque localité, nous eussions pu opérer sur un plus grand nombre. Mais comment déterminer le rapport qui existe entre l'âge de l'arbre et son accroissement moyen aux diverses périodes de sa vie, ou si l'on veut entre les rayons successifs du Pin dans son état moyen, ou plus laconiquement entre l'âge et le rayon d'un *Pin moyen idéal?*

Sans doute on sait d'une manière générale que l'épaisseur des couches ligneuses va en diminuant avec l'âge ; mais ces énoncés vagues, résultats d'une inspection superficielle, qui peuvent satisfaire les gens du monde, ne sauraient prendre place parmi les vérités acquises à la science. Partout où il s'agit de quantité, il faut des mesures rigoureuses, et leurs moyennes deviennent l'expression des lois générales ; aussi un grand botaniste [1], a-t-il dit, en parlant des travaux du genre de celui auquel nous nous sommes livrés : « Des tableaux d'accroissement en diamètre dressés sur un grand nombre d'espèces et d'individus de chaque espèce, donneraient les documents les plus curieux sur la marche de la végétation : 1° on arriverait à établir pour chaque espèce une moyenne de son accroissement annuel, en sorte qu'en connaissant ensuite la circonférence d'un arbre exogène, on pourrait avec une grande probabilité connaître son âge ; 2° étant donnée la connaissance de l'accroissement moyen et de la solidité moyenne d'une espèce de bois, on pourrait juger par l'épaisseur des couches de chaque

[1] De Candolle, l. c., p. 10.

tronc s'il s'écarte plus ou moins des qualités propres à son espèce; on pourrait déduire de là des règles précises sur l'époque où il convient d'abattre certains arbres. J'ose donc croire que des tableaux de coupes horizontales seraient d'une singulière utilité, et je recommande leur confection soit aux voyageurs, soit à ceux qui vivent près de grandes exploitations de bois ou près de grands ateliers de construction. »

Afin que les lois d'accroissement du Pin sylvestre devinssent pour ainsi dire visibles, nous les avons représentées sous forme de courbes, comme le montre la planche jointe au mémoire. Dans le sens horizontal, à partir du point 0, les intervalles correspondent à des dizaines d'années, et dans le sens vertical à des centimètres. Au bout de chaque période de 10, 25 ou 50 ans, portons sur la verticale correspondante une longueur égale au rayon moyen de la circonférence de l'arbre; rayon qui nous est fourni par le tableau V. Joignons ces points par une ligne; celle-ci exprimera le rapport qui existe entre l'âge du Pin moyen et son accroissement; aussi nommerons-nous ces courbes *courbes d'accroissement.* Nous les avons construites séparément pour le Pin moyen de Kaafiord, de Pello, de Geffle, de Halle et de Haguenau.

Si maintenant nous représentons par r, le rayon de l'arbre en millimètres au bout d'un nombre n d'années; par a, un certain nombre de millimètres constant pour chaque courbe, mais variable d'une courbe à l'autre; par b, une constante analogue, mais exprimant un nombre fractionnaire abstrait, on peut représenter ces courbes avec une exactitude suffisante au moyen de la formule [1].

$$r = \frac{an}{1 + bn} \quad (1)$$

Nous avons ensuite déterminé pour chacune de nos quatre stations les quantités constantes a et b, de manière à représenter le mieux possible l'ensemble des observations, et nous sommes arrivés aux ré-

[1] Voyez la note C.

sultats suivants :

Pins de Kaafiord $r = \frac{1^{mm},185.n}{1 + 0,0028.n} = \frac{423^{mm}.n}{357 + n}$ (2)

Pins de Pello $r = \frac{1^{mm},736.n}{1 + 0,0052.n} = \frac{334^{mm}.n}{192 + n}$ (3)

Pins de Geffle $r = \frac{2^{mm},438.n}{1 + 0,0042.n} = \frac{580^{mm},5.n}{238 + n}$ (4)

Pins de Halle $r = \frac{3^{mm},85.n}{1 + 0,011.n} = \frac{350^{mm}.n}{91 + n}$ (5)

Veut-on, d'après ces formules, calculer, par exemple, le rayon moyen des Pins de Kaafiord à l'âge de 100 ans, on divisera 42,300 par 457 ; le quotient $92^{mm},6$ est le résultat cherché.

Les rayons calculés par ces formules sont inscrits au tableau V, dans les rangées qui portent le nom de *rayon par la formule*. La différence tantôt positive, tantôt négative de ces rayons avec les rayons observés, se trouve inscrite dans une rangée particulière immédiatement au-dessous de la précédente.

Quand on connaîtra le nombre d'années (n) pendant lesquelles aura vécu un Pin de Kaafiord, de Pello, etc., on déduira de ces mêmes formules le demi-diamètre (r) probable, et réciproquement si l'on connaît le demi-diamètre, l'équation

$$n = \frac{r}{a - rb},$$

qui n'est qu'une transformation de la formule (1), exprimera son âge d'une manière très-approximative.

En prenant les différences, deux à deux, entre les rayons calculés, propres à chaque période commençante et finissante, on obtiendra les accroissements successifs calculés d'après la formule. De là résultent les nombres que nous avons réunis dans les tableaux I, II, III, IV, au-dessous des épaisseurs moyennes, sous le titre : *épaisseurs calculées*. La rangée la plus basse donne la différence entre le calcul

et l'observation. Ce sont les différences de cette dernière rangée qu'on doit s'occuper à rendre le plus petites possibles, par une détermination convenable des quantités a et b [1].

Les séries de moyennes, obtenues pour chacune de nos quatre stations, ne sont pas toutes également bien représentées par les formules qui leur correspondent. Pour Kaafiord et Geffle, l'accord est très-satisfaisant, mais cela n'a rien de surprenant, puisque ce sont les séries où les moyennes sont déduites du plus grand nombre de couches. Dans la première colonne du tableau I, les épaisseurs moyennes correspondent à 20 fois 50 ou 1000 couches annuelles. Dans le tableau III, elles correspondent à 675 couches; à 500 dans le tableau II, et seulement à 130 dans le tableau IV. Plus le nombre de couches que l'on considère est élevé, plus ces irrégularités accidentelles tendent à se compenser. Aussi voyons-nous que la série de Halle est assez mal représentée par la formule (5) que nous avons donnée ci-dessus. Il est impossible de trouver un système de valeurs pour les coefficients a et b qui ne laisse subsister des anomalies assez graves, soit sur la longueur des rayons moyens, soit sur la grandeur des épaisseurs moyennes de chaque période décennale [2]; mais il est probable que cette anomalie disparaîtrait si les moyennes étaient déduites d'un grand nombre de mesures [3].

Examinons maintenant quelle est la signification concrète des valeurs qui entrent dans nos formules. a représente, *à très-peu près*, le rayon moyen de la couche centrale ou le demi-diamètre moyen de la pousse de la première année. Si, à l'aide de nos formules, on cherche à calculer la longueur de ce rayon, il faut faire $n = 1$, et l'on trouve ainsi $1^{mm},18$; $1^{mm},73$; $2^{mm},43$; $3^{mm},81$. Ces nombres diffèrent très-peu des coefficients numériques du numérateur des fractions qui, dans les formules (2), (3), (4) et (5), expriment la valeur moyenne du rayon.

Ce coefficient a, ou rayon de la couche centrale, varie assez réguliè-

[1] Voyez la note D.
[2] Voyez la note E.
[3] Voyez la note F.

rement en suivant la loi de la latitude ; du moins les modifications qu'on est obligé d'apporter à sa valeur pour le faire décroître régulièrement pendant que la latitude augmente, ne dépassent pas (entre les méridiens sous lesquels nous avons observé) les erreurs dont il est permis de croire que nos coefficients sont encore entachés.

En calculant a par la formule

$$a = 0^{mm},136\ (79 - L),$$

dans laquelle L représente la latitude, on peut former le tableau comparatif suivant.

Latitude. . . .	69° 57′	66° 48′	60° 40′	51° 30′
—	—	—	—	—
Valeur de a observée. .	$1^{mm},19$	$1^{mm},74$	$2^{mm},44$	$3^{mm},85$
Valeur de a calculée . .	$1^{mm},19$	$1^{mm},66$	$2^{mm},49$	$3^{mm},74$

Voici, d'après la formule, les valeurs du coefficient a, de cinq en cinq degrés, depuis le 50e jusqu'au 70e parallèle :

Latitude. . . .	50°	55°	60°	65°	70°
—	—	—	—	—	—
Valeur de a.	$3^{mm},94$	$3^{mm},26$	$2^{mm},58$	$1^{mm},90$	$1^{mm},22$

[1]

Le coefficient a est éminemment propre à nous faire voir combien la force de végétation du Pin varie avec la distance à l'équateur pendant les premières années de sa croissance.

L'on pourrait croire que l'effet de la latitude se traduisant sur l'arbre par l'intermédiaire des influences météorologiques, et principalement de la température, l'on obtiendrait une loi plus régulière en substituant aux latitudes des stations leurs températures moyennes, mais cela n'est pas, car les moyennes températures sont exprimées pour chacune de nos stations par les nombres suivants :

0°,0   0°,4   4°,4   8°,8 [2].

[1] Voyez la note G.

[2] Mahlmann, *Tabelle ueber die mittlere Vertheilung der Waerme in der jaehrlichen Periode.*



Aucune loi de décroissement proportionnel à la température ne peut expliquer les valeurs observées de *a*, sans admettre sur ce coefficient des erreurs égales au sixième de sa valeur totale, proportion évidemment trop forte.

On sera plus heureux en se bornant aux moyennes estivales, savoir : des mois de juin, de juillet et d'août, car elles sont exprimées par les quatre nombres suivants :

9°,0? 13°,5 14°8 17°,5,

et la loi de décroissement qu'on en déduirait serait assez conforme à l'observation.

Étudions maintenant la signification de la quantité *b*. Si dans une même localité l'accroissement des Pins était uniforme pendant toute la vie de l'arbre, la formule qui le représente serait :

$$r = an,$$

ce qui revient à multiplier l'accroissement de la première année par le nombre des années, et, dans notre figure, l'accroissement total serait représenté par une ligne droite. Il n'y aurait qu'à déterminer le coefficient *a*. Mais, l'accroissement diminuant avec l'âge, les rayons ainsi obtenus seraient trop grands. Il fallait donc diviser le produit *an* par l'unité, augmentée d'une quantité *bn* d'autant plus grande que l'arbre est plus âgé. Cette quantité se trouvant au dénominateur de la fraction, celle-ci deviendra plus petite à mesure que son dénominateur sera plus grand : elle exprimera donc le ralentissement de la croissance avec l'âge. C'est donc cette quantité *bn* qui transforme la ligne droite en une courbe dont la concavité est tournée vers l'axe des abscisses (voyez la planche). Si cette quantité *b* devenait nulle, la courbe continuerait sa route en ligne droite. Les couches annuelles conserveraient la même épaisseur, et l'arbre végèterait toujours avec la même vigueur. Supposons maintenant deux arbres dont l'accroissement serait le même pendant les premières années, mais que, vers l'âge de 100 ans, l'accroissement de l'arbre A soit plus fort que celui de l'ar-

bre B. Nous exprimerons algébriquement ce fait en donnant à b, dans la formule destinée à représenter la croissance de l'arbre B, une valeur plus grande que celle qu'il a dans la formule de l'arbre A, et les deux courbes seront entre elles comme celle de Kaafiord, par exemple, est à celle de Pello. L'on pourra dire alors que l'arbre B a eu une vieillesse précoce comparé à l'arbre A.

Pour nous rendre compte plus exactement de ces effets, nous avons calculé les épaisseurs de chaque 25e couche pour chacune de nos stations au moyen de la formule [1]

$$\frac{a(n+1)}{1+b(n+1)} - \frac{an}{1+bn} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{(1+bn)^2} \qquad (6)$$

C'est avec cette formule que nous avons dressé le tableau VI. On y verra que, malgré la grande différence de force végétative qu'offrent les deux stations de Geffle et de Halle, déjà avant la 50e année de leur âge, les Pins de Halle croissent moins vite que ceux de Geffle. Si l'on compare ceux de Pello à ceux de Kaafiord, on remarque un résultat semblable vers leur 150e année. Ainsi donc à Halle le premier jet des Pins est beaucoup plus vigoureux qu'à Geffle, mais cette croissance rapide ne se soutient pas. Aussi le coefficient b a-t-il une valeur considérable dans la formule (5) qui représente les Pins de Halle. Ce coefficient b exprime donc le degré de caducité de l'arbre, c'est-à-dire la rapidité avec laquelle il converge vers un état stationnaire.

Comparons maintenant les valeurs différentes de ce coefficient b, dans les différentes formules (2, 3, 4 et 5) qui représentent les accroissements des Pins de Kaafiord, Pello, Geffle et Halle. Les variations de ce coefficient ne semblent pas être en rapport avec la latitude, ni avec les lignes isothermes; ou du moins si ce rapport existe, nous pouvons affirmer que, dans le Nord, la végétation du Pin se soutient, en s'avançant vers le pôle, d'une manière remarquable.

Si nous étudions avec plus de détails les climats sous lesquels végé-

[1] Voyez la note H.

taient les Pins que nous avons mesurés, nous verrons que les uns rentrent dans la classe des climats marins, les autres dans celle des climats continentaux. L'établissement métallurgique de Kaafiord est situé au fond d'un golfe étroit et profond. Toutefois en ligne droite il n'est pas à plus de 5 myriamètres de la pleine mer. Sa température moyenne annuelle et de 0°,10 C. Mais sa proximité de la mer tend à égaliser les saisons, ainsi les hivers sont peu rigoureux. Les vents de l'Ouest et du Nord élèvent sans cesse la température, les vents froids de l'Est et du Sud-Est soufflent rarement, et ce n'est qu'accidentellement et pour peu de temps que le thermomètre descend à 20° au-dessous de zéro. Jamais le mercure ne gèle, et en estimant à — 8°,5 la moyenne de l'hiver, on s'éloignera peu de la vérité. Mais si les hivers sont remarquablement doux, eu égard à la latitude, les étés sont sans chaleur, des brumes fréquentes obscurcissent le soleil, et l'obliquité de ses rayons n'est pas compensée par sa présence continuelle au-dessus de l'horizon; car la température estivale n'est que de 9° environ. Si l'on se rappelle combien le voisinage de la mer est hostile à la végétation arborescente, combien la violence des vents s'oppose à la croissance en hauteur des arbres verts, et combien les chaleurs de l'été leur sont nécessaires, on s'étonnera de trouver encore le Pin végétant et fructifiant sous des conditions climatériques aussi défavorables.

Quoique l'on n'ait point de séries d'observations météorologiques faites au village même de Pello, on peut conclure son climat de celles de Karasuando et d'Over-Torneo, entre lesquels ils est situé. La température moyenne de l'année doit y être peu supérieure à celle de Kaafiord, car l'isotherme de 1° qui atteint sur la côte O. de la péninsule scandinave son point latitudinal le plus élevé, s'abaisse rapidement sur le versant oriental des Alpes laponnes. La moyenne de Pello sera donc peu supérieure à 0°; mais cette moyenne résulte de températures extrêmes beaucoup plus éloignées l'une de l'autre que celles de Kaafiord. Ainsi le mercure gêle souvent à Pello, et la moyenne de l'hiver ne saurait être supérieure à — 12°, tandis que celle de l'été oscille entre 13° et 14°.

On voit qu'avec des moyennes sensiblement égales, les climats de Kaafiord et de Pello sont fort différents l'un de l'autre : l'un est un climat continental, l'autre un climat marin. Ces différences se traduisent, du reste, dans tout l'ensemble de la végétation, et influent sur la croissance *initiale* du Pin en particulier.

Geffle a un climat un peu plus froid que celui d'Upsal, dont il n'est éloigné que de 48′ en latitude. Or, la moyenne annuelle d'Upsal est de 5°,3; celle de l'hiver — 3°,7, et celle de l'été 15°,1 [1]. L'hiver est donc presque aussi rigoureux qu'à Kaafiord, mais l'été est beaucoup plus chaud; donc les moyennes de Geffle doivent être plus élevées que celles de Pello. La température moyenne annuelle de Halle est de 8°,8; celle de l'hiver 0°,0, celle de l'été de 18°,1 : climat essentiellement continental, et tel que la position de Halle au centre de l'Allemagne pouvait le faire prévoir.

Malgré ces différences dans les climats, les variations du coefficient *b* ne sont nullement en rapport avec elles; en effet, on peut voir dans les formules (2), (3), (4) et (5), que sa valeur augmente à mesure que la température moyenne devient plus élevée; résultat difficile à expliquer par les lois connues de la végétation. Mais il est permis de penser que ce coefficient *b* est jusqu'à un certain point en rapport avec la nature physique et chimique du sol dans lequel les Pins se sont développés. Nous sommes hors d'état de vérifier *a posteriori* l'existence d'une semblable relation, puisque nous n'avons pu examiner chaque fois quelles étaient les qualités spéciales du sol sur lequel ces arbres ont végété dans chaque localité. Mais *a priori* une telle relation n'est nullement invraisemblable, et il est fort possible que si nos arbres avaient été coupés ailleurs (la latitude, la température et les autres conditions climatériques restant les mêmes), on eût trouvé pour le coefficient *b*, des valeurs notablement différentes de celles que nous avons obtenues. Ces différences seraient dues à la constitution du sol qui n'eût pas été la même. L'épaisseur moyenne de la

[1] Mahlmann, l. c.

couche centrale resterait au contraire peu sensible à cette influence.

Ce sujet est encore peu étudié, quoique l'on sache d'une manière vague et générale que certains arbres réussissent de préférence sur certains terrains; par exemple les hêtres sur le calcaire, les châtaigniers sur les terrains siliceux. La nutrition s'opérant par les extrémités des radicelles, lesquelles progressent sans cesse du centre à la circonférence et vont puiser de nouveaux sucs dans des zones de plus en plus éloignées; on pourrait se demander si ces racines qui traversent le sol dans tous les sens, se joignent, s'entrelacent, se gênent dans leur accroissement, ne finissent pas par se nuire mutuellement en épuisant le terrain. Des arbres trop rapprochés s'entravent dans leur développement, et leur végétation se ralentit à mesure qu'ils grandissent. C'est à ces circonstances toutes locales et physiologiques que sont dues les variations du coefficient b, dans les formules (2), (3), (4) et (5).

Si l'on veut savoir quelle valeur de b correspondrait à un état moyen du sol, il suffit de prendre la moyenne entre les quatre valeurs trouvées pour b, ce qui donne :

$$b = 0{,}0058.$$

Mais comme on doit accorder plus d'importance dans la formation de la moyenne, aux valeurs 0,0028 et 0,0042, déduites des séries les plus nombreuses; on adoptera de préférence la valeur

$$b = 0{,}005.$$

Nous ferons aussi remarquer qu'on aurait tort d'accorder une trop grande confiance à un coefficient destiné à représenter les effets d'un élément aussi variable que le sol. Nous ne pouvions espérer de déterminer cette valeur moyenne avec une bien grande exactitude.

En résumé, la croissance moyenne du Pin sylvestre peut se représenter par la formule

$$r = \frac{0^{mm},136\,(79 - L)\,n}{1 + 0{,}005 . n},$$

où r représente le rayon au bout de n années et L la latitude. On n'oubliera pas que cette formule n'est applicable qu'entre le 50e et le 70e degré de latitude, mais principalement au delà du 60e.

On sait que la surface s d'une section horizontale du tronc dont r est le rayon, est égale à πr^2, on la déduira donc facilement de la valeur connue du rayon r dans la formule (1); à chaque époque de la vie de l'arbre elle sera exprimée par la formule :

$$S = \frac{\pi a^2 n^2}{(1 + bn)^2}.$$

L'accroissement annuel de cette surface n'est autre que la surface annulaire de la nouvelle couche, et s'obtiendra en multipliant la circonférence

$$2\pi r = \frac{2\pi a n}{1 + bn}$$

par l'épaisseur d'une couche annuelle

$$\frac{a}{(1 + bn)^2}$$

que nous avons trouvée, p. 13, car on peut sans erreur sensible considérer cette surface annulaire comme un rectangle dont la base est égale à la circonférence dont le rayon est r, et la hauteur à l'épaisseur de la $(n+1)^{me}$ couche. En exécutant ce calcul, on voit que la surface de la $(n+1)^{me}$ couche a pour valeur

$$\frac{2\pi a^2 n}{(1 + bn)^3}. \quad (7)$$

Le tableau VII donne en millimètres carrés la surface de chaque 25e couche. Cet accroissement annuel atteint un *maximum*, après lequel il devient de plus en plus petit. Ce *maximum* a lieu lorsque l'on a $n = \frac{1}{2b}$, comme on le prouve en ayant recours aux calculs supé-

rieurs. Après la substitution de cette valeur de n dans la formule précédente, on a pour l'expression du *maximum* de surface d'une couche annuelle :

$$\frac{4\pi a^2}{27b}.$$

Si dans l'équation $n = \frac{1}{2b}$, on donne à b les différentes valeurs indiquées dans les formules (2), (3), (4) et (5), on trouve que l'époque de l'accroissement *maximum* en surface arrive à 178 ans, pour les Pins de Kaafiord; à 96 ans pour ceux de Pello; à 119 ans pour ceux de Geflle, et à 46 ans pour ceux de Halle. Pour chaque arbre considéré isolément, l'époque de la croissance *maximum* en surface est excessivement variable, et le moindre accident de végétation suffit pour la déplacer. Sur le Pin moyen, considéré dans nos différentes localités, l'arrivée de cette époque est d'autant plus tardive que le coefficient b est plus petit. En admettant la valeur 0,005 comme exprimant la valeur moyenne la plus générale de ce coefficient b, on trouve que c'est au bout d'un siècle que l'accroissement annuel en surface est le plus considérable.

Avant de terminer ce paragraphe, nous devons faire remarquer que les Pins de Geflle et des provinces voisines, sont les plus beaux de la Suède et les plus propres par la nature de leur bois à être employés aux constructions navales. Dans les climats plus méridionaux, le premier élan de la végétation est beaucoup plus énergique. Il en résulte que les couches sont épaisses et le bois peu dense; en outre, cet élan se ralentit bientôt et l'arbre cesse de prospérer. Les Pins de Kaafiord ont un bois plus dur, plus compacte que ceux de Geflle, mais il n'est pas élastique. C'est à ces précieuses qualités des Pins de la Suède moyenne, que la marine marchande de ce pays doit la bonté et la force de ses navires. Comme l'accroissement annuel diminue lentement, les arbres de Geflle peuvent acquérir des dimensions considérables. Ceux des environs de Kaafiord, au contraire, ont un accroissement primordial beaucoup trop lent pour pouvoir atteindre la même grosseur.



II. DES VARIATIONS DE L'ACCROISSEMENT.

S'il nous a été difficile de trouver une loi propre à représenter les relations de nos résultats moyens entre eux, il nous sera plus difficile encore de retrouver quelque apparence d'ordre ou de régularité dans les écarts que nos mesures offrent entre elles. Il semble qu'il n'existe à cet égard d'autre règle que cette variabilité même. Cependant, dès qu'on opère sur des nombres un peu grands, il se manifeste une tendance vers un état de choses régulier qu'il est intéressant d'étudier.

Dans ce but, concevons d'abord qu'on ramène tous nos tableaux d'accroissement à un seul type, en prenant une période commune, celle de 50 ans. Le tableau I restera le même. Dans les tableaux II et III on additionnera les nombres des colonnes impaires avec ceux des colonnes paires, et les entêtes des colonnes deviendront 0-50; 50-100; 100-150, etc., comme dans le tableau I. On transformera de même le tableau IV. Ne tenons pas compte des bouts de rayons qui dépassent la dernière période de 50 ans, et formons les moyennes au bas de chaque colonne. Prenons ensuite, dans chacune de ces colonnes, la différence entre chacun des nombres qui concourent à la formation de la moyenne et cette moyenne elle-même, en retranchant constamment le plus petit nombre du plus grand. Ces restes donneront les écarts d'avec la moyenne, considérés d'une manière absolue et indépendamment de leur signe. Prenons enfin la moyenne de ces écarts; *l'écart moyen* ainsi obtenu, nous fournit une mesure de la *variabilité* de la quantité dont nous connaissons déjà l'état moyen. Ainsi, dans le tableau I, on trouve entre chaque nombre de la colonne 0-50 et le résultat moyen $50^{mm},25$ les différences suivantes : $44^{mm},85$; $12^{mm},05$; $10^{mm},45$; $1^{mm},05$; $33^{mm},65$ .... $12^{mm},25$; $32^{mm},15$. La moyenne de ces vingt nombres sera $16^{mm},57$; c'est cette quantité qu'on nomme *l'écart moyen* [1].

Ainsi les accroissements en 50 ans ou accroissements semi-séculaires, oscillent autour de leur valeur moyenne, avec une variabilité

[1] *Voy.* la note *I*.

indiquée par l'écart moyen. Si l'on divise cet écart moyen par l'épaisseur moyenne du groupe formé par les 50 couches annuelles, à laquelle cet écart correspond, le rapport ainsi obtenu sera *l'écart moyen relatif*, c'est-à-dire l'écart moyen, lorsqu'on prend pour unité de mesure cette même épaisseur moyenne. Cet écart moyen relatif nous offre donc la mesure de la variabilité des accroissements semi-séculaires[1].

Nous avons calculé pour nos quatre stations, la valeur de ces *écarts moyens relatifs* dans chacun des demi-siècles qui composent la vie de l'arbre, en voici le tableau. Nous y joignons les résultats fournis par les mesures de 30 Pins de la forêt de Haguenau (Bas-Rhin), que nous devons à l'obligeance de MM. Millet et Nanquet.

ÉCARTS MOYENS RELATIFS DE L'ACCROISSEMENT SEMI-SÉCULAIRE DES PINS.

LIEUX.	0—50	50—100	100—150	150—200	MOYENNES.
Kaafiord	0,33	0,25	0,23	0,26	0,27
Pello	0,16	0,15	0,22	»	0,18
Geffle	0,31	0,30	0,25	0,27	0,28
Halle	0,15	»	»	»	»
Haguenau	0,25	0.14	»	»	0,20
MOYENNES.	0,24	0,21	0,23	0,26	»
MOYENNE générale . . .	 0,24				

Si dans chaque rangée horizontale on compare ces divers résultats

[1] Éclaircissons ce point par un exemple emprunté à une autre branche des sciences naturelles. Si l'on s'occupait de rechercher quelles sont les variations de la taille dans les animaux mammifères, on trouverait que les Musaraignes sont les plus petits, les Baleines les plus gros dans le rapport de 1 à 750 (*voy.* Isid. Geoffroy St-Hilaire, *Essais de zoologie générale*, p. 339); supposons que les variations moyennes soient de quelques millimètres dans les premières et de plusieurs mètres dans les secondes. Dira-t-on que la variabilité de la taille est infiniment plus grande dans les Baleines que dans les Musaraignes? nullement, car cette variabilité est *relative* à la taille moyenne des espèces du genre. Elle ne sera la même dans ces deux genres d'animaux que dans le cas où la variation *absolue* de la Baleine sera 750 fois plus grande que celle de la Musaraigne.



entre eux et avec leurs moyennes générales, qui se trouvent dans la dernière colonne à droite, on verra que cet écart reste sensiblement le même pendant toute la vie de l'arbre; l'accroissement étant tout aussi variable à un âge avancé que dans la jeunesse. Du reste, pour se rendre compte de ce résultat d'une manière plus claire, prenons de haut en bas les moyennes de chaque colonne, en excluant toutefois les séries trop incomplètes de Halle. Nous trouverons les nombres suivants :

0,26; 0,21; 0,23; 0,26;

ces différences sont évidemment de l'ordre de celles qui peuvent exister pour des éléments aussi variables.

En comparant maintenant les quatre moyennes 0,27; 0,18; 0,28 et 0,20; nous remarquerons une non moindre variabilité pour les Pins de Pello et de Haguenau que pour ceux de Kaafiord et de Geffle. Cette différence peut s'expliquer par cette circonstance que les Pins de Pello et de Haguenau ont été coupés dans une localité restreinte et nullement accidentée. Ceux de Geffle provenaient au contraire de plusieurs forêts assez distantes entre elles. Ceux de Kaafiord avaient crû sur un espace limité, mais sur un terrain très-montueux, où l'exposition et la nature du sol étaient fort différentes. Enfin la croissance uniforme des Pins de Halle s'explique par les mêmes causes. Tous avaient été abattus dans la forêt de Giebichenstein à une faible distance les uns des autres.

La variabilité d'accroissement ne dépend donc point de la latitude, mais de la variabilité des circonstances qui ont marqué la vie de chaque arbre. On peut adopter 0,25 pour mesure de cette variabilité moyenne [1], de telle sorte que *l'écart moyen vaut le quart de l'accroissement semi-séculaire moyen.*

Le nombre de cas dans lesquels l'écart est inférieur à l'écart moyen, surpasse celui des cas inverses. Ainsi nous trouvons que cet écart a été inférieur à l'écart moyen :

[1] Voyez la note *K*.

A Kaafiord	42	fois sur	75 ;	le rapport est	0,56	à 1
A Pello	31	—	52	—	0,60	à 1
A Geffle	46	—	84	—	0,55	à 1
A Halle	7	—	13	—	0,54	à 1
TOTAL . . .	126	—	224	—	0,563	à 1 [1]

Passons maintenant à l'examen des écarts moyens relatifs pour les accroissements séculaires. Nous formerons dans ce cas le tableau suivant.

TABLEAU DES ÉCARTS MOYENS RELATIFS DES ACCROISSEMENTS SÉCULAIRES.

LIEUX.	0—100	100—200	MOYENNE.
Kaafiord	0,23	0,22	0,225
Pello	0,14	»	»
Geffle	0,22	0,16	0,19
Haguenau.	0,11	»	»

Enfin pour 200 couches nous trouvons les écarts suivants :

Kaafiord.	0,17
Geffle.	0,11

Ainsi les écarts moyens relatifs diminuent sans cesse à mesure que l'on considère un plus grand nombre de couches. En nous bornant aux observations de Kaafiord et de Geffle, nous trouvons que ces écarts diminuent d'après la loi suivante :

Écart pour un accroissement		semi-séculaire	0,275
—	—	séculaire.	0,207
—	—	bi-séculaire.	0,140

Ce qui veut dire que l'accroissement d'un arbre s'écarte d'autant moins de l'accroissement moyen que cet arbre est plus âgé.

On représente assez exactement ces différentes valeurs en nommant l le nombre d'années de la période qu'on considère, et en prenant $\frac{2}{\sqrt{l}}$

[1] Voyez la note *L*.

pour l'écart moyen relatif correspondant à cet âge. Cette formule donne en effet pour les nombres destinés à remplacer ceux du petit tableau précédent :

0,283 ; 0,200 ; 0,141 [1].

Nous avons voulu connaître pour chacune de nos stations les épaisseurs *maxima* et *minima* des couches annuelles. On les a déterminées en prenant dans chacun des tableaux I, II, III et IV, le groupe de couches dont l'épaisseur, divisée par le nombre de ces couches, donne le plus petit quotient; en voici le tableau :

		KAAFIORD.	PELLO.	GEFFLE.	HALLE.	HAGUENAU.
Épaisseur	*maximum.*	1mm,90	2mm,21	4mm,52	5mm,98	9mm,5
	minimum.	0,16 [2]	0.22 [3]	0.52	0.31	0,5

Ces nombres ne sont que des approximations, car nous n'avons point compté de couche en couche, et dans une série de 25 ou 50 couches, il s'en trouve toujours de plus grandes et de plus petites les unes que les autres. L'épaisseur *maximum* réelle surpasse donc celle de notre tableau. L'épaisseur *minimum* réelle est au-dessous de celle que nous indiquons. Entre le 50e et le 60e degré de latitude, il est difficile de trouver des couches annuelles d'une épaisseur moindre que $\frac{1}{3}$ de millimètre ; dans le Nord, au contraire, il en est dont l'épaisseur est moindre que $\frac{1}{6}$ de millimètre.

En parcourant les nombres si variables qui composent une des colonnes des tableaux I, II, III et IV, nombres qui expriment des mesures de couches correspondantes à la même période de la vie du végétal, on pourrait croire que ces grandes différences proviennent des influences variables des années bonnes ou mauvaises; ainsi, le Pin n° 68 de la série de Halle a acquis de dix à vingt ans une épaisseur

[1] Voyez la note *M*.

[2] Ce sont les 8 dernières couches du Pin n° 15 qui fournissent ce nombre.

[3] Ce nombre est fourni par les 4 dernières couches du Pin n° 37.

de $13^{mm},7$, tandis que le rayon du Pin n° 71 s'est accru pendant la période correspondante de $51^{mm},7$. Mais cette opinion n'est point fondée : en effet, une période de 25 ans est à peu près suffisante pour reproduire constamment les mêmes valeurs moyennes de tous les éléments météorologiques qui déterminent le climat d'un lieu donné. C'est donc dans le sol, dans la perméabilité différente des diverses couches ou zones que traversent successivement les racines que nous devons chercher la cause de ces anomalies, et non dans les variations météorologiques des années successives. Ainsi nous avons vu, en effectuant nos mesures sur les troncs des Pins, que les couches épaisses comme les couches minces étaient disposées sur chaque arbre par groupes ou séries composées d'un nombre très-variable de couches, parfois 3 ou 4 seulement, quelquefois 10, 15, 20, ou plus encore. Dans les mêmes années pendant lesquelles un arbre souffre ou prospère, un arbre voisin se trouvera dans des conditions inverses. Prenons pour exemple ceux de Pello, tous coupés en 1838. Voici les exemples les plus remarquables de couches très-serrées :

Le pin n° 28	avait des couches	très-serrées	correspondantes	aux années	1798—1812
— n° 32	—	—	—	—	1773—1813
— n° 35	—	—	—	—	1795—1798
	—	—	—	—	1813—1819

Ainsi l'indépendance entre la croissance d'une couche annuelle et celle de la couche précédente n'est pas complète. Si une couche est plus ou moins large que la couche moyenne du même âge, c'est une raison pour que la suivante se trouve aussi dans les mêmes conditions. Mais cette dépendance est bornée; elle césse de se faire sentir au bout d'un certain nombre d'années, qu'on peut estimer grossièrement à dix ans par exemple. Nous allons vérifier ces faits de la manière suivante : séparons les vingt Pins du tableau I en deux groupes distincts, l'un composé de dix Pins dont la croissance a été la plus forte pendant le premier demi-siècle; l'autre composé de dix Pins dont la croissance a au contraire été la plus faible, et prenons les moyennes des accroisse-

ments pendant ce demi-siècle et le demi-siècle suivant, nous aurons le tableau que voici :

KAAFIORD.

ANNÉES.	0—50	60—100	100—150
Premier groupe	66,77	44,79	32,07
Second groupe	33,74	39,53	37,08
DIFFÉRENCE	+ 33,03	+ 5,26	— 5,01

Il est évident que la grande prédominance du premier demi-siècle ne se continue pas pendant les demi-siècles suivants. Pour arriver à des résultats plus concluants, faisons de même pour Pello.

PELLO.

ANNÉES.	0—25	25—50	50—75
Premier groupe	43,26	36,75	23,83
Second groupe	29,96	33,28	22,49
DIFFÉRENCE	+ 13,30	+ 2,47	+ 1.34

En partageant les vingt-sept Pins de Geffle en trois groupes de neuf arbres chacun, d'après leur degré de croissance pendant les 25 premières années, nous trouverons :

GEFFLE.

ANNÉES.	0—25	25—50	50—75	75—100
Premier groupe	71,8	55,2	41,2	27,8
Deuxième groupe	50,7	46,5	37,5	34,8
Troisième groupe	29,8	32,1	43,1	33,8
Différence du 1er et du 2me groupe	+ 21,1	+ 8,7	— 3,7	— 7,0
Idem du 2me et du 3me groupe	+ 20,9	+ 14,4	+ 5,6	+ 1,0

Il est donc bien établi que la grosseur des couches d'une période exerce une faible influence sur celle des couches de la période qui la suit immédiatement. Les différences, en ne prenant que les moyennes, forment la série suivante :

	PREMIÈRE PÉRIODE.	DEUXIÈME PÉRIODE.	TROISIÈME PÉRIODE.
	—	—	—
Différence	+ 22,1	+ 7,7	— 0,45

Série qui met cette influence en évidence. Nous devions nous attendre à ces résultats. Le trait de crayon destiné à marquer sur nos bandes de papier [1] le terme de chaque cinquantième ou vingt-cinquième couche, doit nécessairement tomber plus d'une fois sur une de ces séries bonnes ou mauvaises, lesquelles se trouvent ainsi scindées en deux et chevauchant à la fois sur deux périodes successives. Il n'est donc pas étonnant que ces deux périodes subissent en partie les mêmes influences. Mais à part cette action locale et bornée, laquelle se transmet en quelque sorte au contact et d'une couche à sa voisine, l'accroissement lent ou rapide de l'arbre pendant les premières années de sa vie ne préjuge rien sur son accroissement pendant sa vieillesse, ce qui justifie le principe sur lequel nous nous sommes appuyés dans la note *B*, pour mettre les épaisseurs moyennes des dernières années à l'abri des erreurs qu'eût pu produire l'inévitable élimination des Pins les moins âgés.

Le résultat auquel nous venons d'arriver est certainement remarquable, car il prouve la faible influence des causes constantes considérées comme agissant pendant la vie de l'arbre. Ces causes constantes se réduisent au mode d'exposition et à la nature générale du sol ambiant. Ce résultat est donc peu d'accord avec les différences que nous ont fournies les écarts moyens relatifs correspondants à chacune de nos quatre stations. Des observations plus nombreuses, des données plus précises sur les circonstances dans lesquelles ces arbres ont vécu, auraient certainement levé cette contradiction apparente.

[1] Voyez p. 5.

La dernière question que nous allons examiner est celle du changement séculaire que la végétation a pu éprouver dans le nord de l'Europe. Les observations météorologiques auxquelles nous pouvons ajouter quelque confiance, datent à peine d'une centaine d'années; les petites variations climatériques des siècles précédents nous sont donc entièrement inconnues. Les épaisseurs des Pins séculaires du Nord, ne pourraient-ils fournir à cet égard quelques utiles indications? Un changement de 1° en latitude, lequel correspond à peu près à un changement de 0°,5 C., sur la température moyenne du lieu, fait varier le coefficient *a* ou l'épaisseur de la couche centrale de $0^{mm},136$, c'est-à-dire d'une quantité qui, selon la latitude, vaut de $\frac{1}{9}$ à $\frac{1}{18}$ de la valeur de *a*.

Au moyen de deux séries de cent arbres chacune, et en se bornant à mesurer les 100 premières couches, on peut espérer d'obtenir la valeur de ce coefficient *a* à un $\frac{1}{80}$e près dans chaque série. La différence des deux valeurs obtenues serait ainsi connue à $\frac{1}{55}$e près, comme le prouve le calcul des probabilités. Si donc une variation de 0°,5 avait eu lieu depuis 200 ou 300 ans, on la mettrait certainement en évidence par ce moyen. A Kaafiord, on pourrait ainsi constater une variation de température qui ne serait que de 0°,3. Mais nos observations ne sont pas assez nombreuses pour nous mener à un pareil résultat. Elles sont en outre entachées d'un vice dont l'importance est radicale dans une semblable détermination, quoiqu'il n'altère que faiblement tous les résultats auxquels nous sommes arrivés jusqu'ici. En effet, les conclusions relatives au changement de climat ne seraient parfaitement légitimes, que dans le cas où les Pins abattus auraient été pris *entièrement au hasard*, et sans distinction de plus grande ou de moindre grosseur. Or, tel n'était pas certainement le cas des Pins sur lesquels nous avons opéré. Indifférent à leur âge, que d'ailleurs il ignorait, le bûcheron s'est de préférence attaché à choisir les troncs les plus gros, et si de jeunes Pins se sont trouvés mêlés aux arbres abattus, c'est parce que leur croissance était supérieure au développement moyen des arbres de leur âge. Pour pouvoir conclure légitimement

dans une recherche pareille, la coupe doit avoir lieu sans distinction de grosseur et dans les lieux où la hache n'a pas encore pénétré, afin de se ménager l'observation de ces Pins âgés, que leur croissance vigoureuse aurait pu désigner bien des années auparavant à la cognée du bûcheron. Pour être à l'abri de toute cause d'erreur, il faudrait s'assurer en outre si les couches anciennes du Pin sylvestre ne continuent pas à croître un peu pendant les années qui suivent leur formation, quoique le contraire soit généralement admis.

Si l'on partage la série de Kaafiord en deux groupes dont les âges moyens diffèrent de 91 ans, on trouve pour l'épaisseur moyenne des 100 premières couches $93^{mm},6$ dans le groupe le plus âgé, et $90^{mm},0$ dans le groupe le plus jeune. On pourrait donc penser qu'à Kaafiord la végétation s'est ralentie.

La série de Geffle conduit à un résultat opposé. Partagée en trois groupes dont les âges moyens respectifs sont 295 ans, 189 ans et 140 ans, on trouve pour l'épaisseur moyenne des 100 premières couches $131^{mm},6$ dans le groupe le plus ancien; 189,8 dans le second groupe, et 197,2 dans le groupe le plus jeune.

Ces derniers résultats indiqueraient indubitablement une amélioration de la végétation, si les Pins que nous étudions avaient été pris au hasard; mais cette condition n'ayant pas été remplie, on ne peut rien conclure de ces faits.

III. — DE L'EXCENTRICITÉ.

Il est rare que les Pins soient bien exactement centrés; la particularité s'observe même dans la plupart des autres arbres. Sur quelques-uns des plus excentriques, nous avons mesuré les deux demi-diamètres inégaux qui, réunis, composent le diamètre moyen passant par le centre de figure. Voici le résultat de ces mesures.

PINS.	N° 1.	N° 3.	N° 5.	N° 11.	N° 15.	N° 17.	N° 35.	N° 46.	N° 67.
Plus grand rayon.	183,0	177,8	143,8	179,5	146,6	166,6	148,0	390,0	370,0
Plus petit rayon.	106,4	136,4	115,8	145,5	130,4	150,8	106,0	185,0	260,0



L'excentricité *maximum* est celle du n° 46; le rapport est celui de 9 à 19. Nos mesures sont trop peu nombreuses pour que nous puissions en déduire l'excentricité moyenne. Il serait intéressant de savoir si cette excentricité tend à s'effacer de plus en plus à mesure que l'arbre avance en âge, ou si elle tend au contraire à persister. Les mesures que nous avons prises de 25 en 25 couches sur les deux rayons opposés, nous font pencher vers cette dernière opinion, qui se trouve en harmonie avec l'explication que Buffon et Duhamel donnent de ce fait.

Il arrive aussi quelquefois que l'arbre, d'ailleurs assez exactement centré, est sensiblement aplati. Alors sa section horizontale n'est plus un cercle mais un ovale. Ainsi sur le Pin n° 19, les deux rayons perpendiculaires entre eux avaient pour longueurs respectives $291^{mm},6$ et $229^{mm},0$. Le rapport est celui de 127 à 100.

IV. — DE LA LIMITE DE L'AUBIER.

La séparation entre l'aubier et le bois parfait est assez nettement indiquée sur les troncs des Pins septentrionaux; elle est moins distincte dans nos zones tempérées. Nous ne l'avons notée qu'un petit nombre de fois. Le nombre des couches de l'aubier, compté à partir de la couche la plus récente, a été trouvé de 50; 67 et 114, sur les Pins n°s 2, 10 et 13. La largeur moyenne de l'aubier embrasse donc 77 couches ou 77 années. C'est donc aussi en moyenne le temps nécessaire à la transformation de l'aubier en bois parfait, sous la latitude de Kaafiord, en admettant, ce qui n'est point encore démontré, que la transformation de l'aubier en bois se fasse toujours dans le même espace de temps pendant toute la vie de l'arbre [1].

V. — DE LA POUSSE DU PIN EN HAUTEUR.

Nous avons fait quelques observations sur la pousse en hauteur des Pins de Geffle et de Pello; en voici le résultat :

[1] Voy. De Candolle, *Organographie*, t. I, p. 174 et suivantes.

Pin n° 35 . . .	10m,86 en 58 ans.	Pousse annuelle. . .	187mm
Pin n° 36 . . .	10m,83 en 47 ans.	— . . .	230
Pin n° 61 . . .	15m,04 en 60 ans.	— . . .	251
Pin n° 66 . . .	19m,18 en 119 ans.	— . . .	161
Moyennes. .	13m,96 en 71 ans.	— . . .	207mm

La pousse annuelle moyenne vers le 64e degré de latitude est donc de 207 millimètres. Vers le 70e elle est certainement beaucoup plus petite. En effet, les vieillards des environs de Bosekop nous assuraient que les Pins qui entourent le village n'avaient point grandi depuis qu'ils les connaissaient. Leur hauteur est de 5m à 10m; rarement ils atteignent celle de 15 mètres.

A mesure que l'arbre s'élève, la section horizontale du tronc devient de plus en plus petite, et le nombre de couches qui la composent est nécessairement inférieur à celui des couches de la section du pied. Les diamètres des deux sections s'accroissent en même temps, mais l'on peut se demander s'ils croissent également vite, ou, en d'autres termes, si l'épaisseur des couches contemporaines est la même dans le haut et dans le bas. Pour le découvrir, nous avons mesuré des sections faites au petit bout du tronc, et nous les avons comparées avec les accroissements contemporains qui leur correspondent dans la partie extérieure du rayon de la section faite au pied de l'arbre.

Pin n° 35.	Accroissement du rayon infér.	en 108 ans = 76mm,7.	Rayon super.	94mm,0
Pin n° 36.	—	en 123 ans = 75mm,2.	—	85mm,0
Pin n° 61.	—	en 196 ans = 197mm,2.	—	145mm,0
Pin n° 66.	—	en 254 ans = 153mm,0.	—	142mm,0
	Accroissement moyen dans le bas.	125mm,5,	dans le haut .	126mm,5

Cette correspondance se soutient même dans les détails : ainsi le tronc du Pin n° 35, mesuré à son extrémité supérieure, nous a offert une série de couches minces correspondantes aux années 1789 à 1799, et 1813 à 1819.

De là résultent deux conséquences, la première c'est que l'obliquité de l'arête externe du cône formé par le tronc doit rester la même pen-

dant toute la vie de l'arbre, ou, en d'autres termes, la surface externe des couches doit former constamment le même angle d'inclinaison avec l'axe du tronc. Cet *angle de décroissement*, calculé pour chacun des quatre arbres, a les valeurs suivantes :

0°16′ 0°16′ 0°30′ 0°23′.

La moyenne générale est 0°21′. L'obliquité de l'arête externe relativement à l'axe est donc de $\frac{1}{3}$ de degré environ.

La seconde conséquence est relative à la pousse annuelle elle-même. Si cet angle est en effet constant, cette pousse annuelle en hauteur ne saurait l'être, puisque les accroissements annuels du rayon de la base auxquels elle correspond, deviennent de plus en plus petits; cette pousse devient donc de plus en plus petite, et la hauteur H de l'arbre est liée au rayon r de la base par la relation

$$r = \text{H tang.}\ (0°21'),$$

d'où

$$\text{H} = 164r = \frac{164an}{1 + bn};$$

n exprimant le nombre d'années correspondant à l'âge de l'arbre, a et b les deux valeurs de nos coefficients, pour le point du globe que l'on considère. Si cette manière de voir est exacte, et si l'on admet le parallélisme des surfaces de couches successivement emboîtées les unes dans les autres comme étant leur état normal, la valeur de 207 millimètres trouvée ci-dessus comme représentant la pousse annuelle moyenne sous le 64e degré, ne conviendrait, comme le montre le premier tableau de la page précédente, qu'aux premières années de la vie de l'arbre.

VI. — DE QUELQUES ACCIDENTS DE LA VÉGÉTATION DU PIN SYLVESTRE.

Dans les hautes latitudes, surtout à partir du 63e degré, les Pins offrent quelques particularités de croissance assez remarquables. Souvent la pousse terminale est détruite; un vent violent peut la casser, comme nous l'avons vu sur les Sapins de la vallée de Grindelwald, en

Suisse, après l'ouragan du 17 au 18 juillet 1841. Le coq de bruyère (*Tetrao urogallus*, L.), si commun dans les forêts de la Suède, se perche toujours au haut des Pins et des Sapins, et nous avons vu souvent leur extrémité se courber sous le poids de cet oiseau, dont le volume égale celui du dindon. Enfin il paraît que deux Phalènes (*Tortrix Buoliana*, Fabr. et *T. turioniana*, L.) attaquent souvent cette pousse terminale[1]. Alors, parmi les branches qui l'entourent, il en est deux toujours opposées qui grossissent plus que les autres, et le tronc se bifurque. Les mêmes remarques s'appliquent au Sapin (*Abies excelsa*, Poir.). Dans le Nord on voit souvent des Sapins bifurqués à une grande hauteur, d'autres qui le sont à un ou deux mètres du sol. Ces accidents de végétation ne se voient pas exclusivement dans les contrées boréales de l'Europe; car nous les avons rencontrés assez souvent en Suisse. On peut les observer sur le Pin dans les forêts voisines de Bâle; pour le Sapin, dans celles qui se trouvent entre Berne et Aarberg. Si l'on compare le mode de bifurcation dans les deux arbres, on verra que dans le Sapin les deux branches de la fourche sont raccordées entre elles par une petite courbe concave vers le ciel, tandis que dans le Pin les deux branches font un angle aigu entre elles.

Autour de Kaafiord, un grand nombre de Pins portent des bouquets formés de branches étroitement entrelacées entre elles, et dont l'aspect rappelle tout à fait celui de notre Gui (*Viscum album*, L.). A mesure qu'on s'avance vers le Sud, ces bouquets deviennent moins communs, et en Suisse je me rappelle n'en avoir observé qu'un seul dans la vallée de Saas, non loin du village de Zerschmieden.

Tel est le résumé de nos observations sur la croissance du Pin. Nous avons aussi mesuré l'épaisseur des couches annuelles sur des Chênes (*Quercus robur*, L.) à Geffle, et sur des Frênes (*Fraxinus excelsior*, L.) à Upsal. L'étude de la croissance de ces arbres, qui dans ces deux localités sont à leur limite extrême, comparée à celle des mêmes espèces en France et en Italie, pourra fournir d'intéressants documents pour la physiologie végétale.

[1] Voy. Ratzeburg, *Die Forst Insecten*, t. II, p. 202 à 209, et tableau XIV, fig. 4x et 8x.

VII. — DE L'ACCROISSEMENT DES PINS DE LA FORÊT DE HAGUENAU (BAS-RHIN).

Notre travail sur les pins du Nord était déjà terminé lorsqu'un habile forestier, M. Millet, voulut bien nous communiquer des mesures semblables aux nôtres, qu'il avait faites avec M. Nanquet sur des Pins de la forêt domaniale de Haguenau, près de Strasbourg. Nous les donnons dans le tableau VIII. Aux pages 20, 22 et 23, on trouvera les écarts moyens relatifs, semi-séculaires et séculaires, et les épaisseurs *maximum* et *minimum* de ces Pins. La forêt où ils ont été abattus est située par lat. 48°43′ N., long. 5°27′ E., et à 144 mètres au-dessus de la mer. Le sol est un sable siliceux, frais, contenant un peu d'humus. Son climat est celui de Strasbourg, qui n'en est éloigné que de trois myriamètres. D'après 15 années d'observations du professeur Herrenschneider [1], la moyenne générale de l'année est de 9°,8; celle de l'hiver 1°,4; celle de l'été 17°,8.

Si l'on jette les yeux sur le tableau VIII, on verra que la loi que suit la moyenne épaisseur des couches annuelles successives est bien différente de celle que suivaient les mêmes couches dans le Nord. Dans les premières années, l'accroissement va en s'accélérant; il atteint sa plus grande valeur vers 40 à 50 ans; après quoi il décroît lentement d'abord, puis avec une rapidité qui devient très-marquée vers l'âge de 100 ans. (*Voy.* la planche.)

Il est impossible d'exprimer toutes ces variations au moyen d'une formule aussi simple que celles que nous avons employées dans le courant de ce mémoire. Après quelques tâtonnements, nous avons trouvé que la formule propre à donner la valeur de l'accroissement annuel, c'est-à-dire de l'épaisseur e d'une couche au bout d'un nombre n d'années était :

$$e = \frac{3^{mm},80}{1 + \left(\frac{n - 50}{63}\right)^2}.$$

[1] Résumé des observations faites à Strasbourg de 1811 à 1820. (*Mémoires de la Société des sciences et arts de Strasbourg*, vol. II.)



Si l'on veut calculer de suite la grosseur du pin moyen de Haguenau, lorsqu'il a vécu n années on obtient le demi-diamètre en multipliant 4^{mm},078 par la valeur en degrés et fractions de degré de l'arc qui a pour sa cotangente

$$\frac{102,7}{n} - 0,794.$$

En calculant les rayons successifs de l'arbre pour $n=10=20=30$, etc., nous avons obtenu les résultats suivants :

TABLEAU DE LA LONGUEUR DU RAYON DE L'ARBRE ENTRE 10 ET 130 ANS.

ANNÉES.	RAYONS.	ANNÉES.	RAYONS.
10.	25^{mm},2	80	267^{mm},0
20.	54 , 2	90	296 , 0
30.	87 , 0	100	321 , 2
40.	123 , 0	110	342 , 8
50.	160 , 6	120	361 , 2
60.	198 , 2	130	377 , 0
70.	234 , 2		

C'est d'après cette formule que nous avons tracé la courbe de croissance des Pins de Haguenau sur notre figure. Cette courbe est presque une ligne droite pendant tout le premier siècle de la vie de l'arbre, surtout si l'on compare sa faible courbure à celle des quatre lignes du Nord. Les Pins de Halle croissent d'abord plus vite que ceux de Haguenau ; leur grosseur est la même vers l'âge de 30 ans. Au delà, le Pin français l'emporte de plus en plus sur l'autre.

Dans le cours du mémoire, nous avons fait remarquer que la formule des Pins de Halle ne représentait pas exactement l'observation. La courbe de Haguenau nous a fait présumer par analogie, que nous serions plus heureux en essayant la forme suivante, qui représente la longueur du rayon r au bout de n années :

$$r = a \times \text{arc.} \left(\text{cotang.}\ \frac{b}{n}\right),$$

ou, ce qui revient au même, en exprimant l'épaisseur *e* au bout de *n* années par la formule

$$e = \frac{A}{1 + Bn^2}.$$

Les nombres *a*, *b* ou *A*, *B* doivent être déterminés par l'observation. L'accroissement annuel *e* des pins de Halle est alors assez bien représenté par la formule

$$e = \frac{3^{mm},3}{1 + \frac{n^2}{100}} = \frac{330^{mm}}{100 + n^2}.$$

Toutefois, cette formule n'est guère plus exacte que celle que nous avons employée dans le cours du mémoire.

VIII. DES CONDITIONS DE LA DISTRIBUTION GÉOGRAPHIQUE DU PIN SYLVESTRE SUR LE CONTINENT EUROPÉEN.

L'ensemble de ce mémoire prouve que le climat et le sol ont une influence bien différente sur la végétation du Pin sylvestre. En effet, l'épaisseur des couches annuelles diminue à mesure qu'on s'approche du pôle, c'est-à-dire, à mesure que le climat devient plus rigoureux ; mais la température est sans influence sur la vigueur de la végétation pendant toute la durée de la vie d'un arbre. Ainsi les Pins de Pello, quoique ayant un accroissement initial plus rapide que ceux de Kaafiord, ont une décadencc plus prompte. L'épaisseur des couches de ceux de Halle diminue plus rapidement que celle des Pins de Geffle, et l'accroissement des Pins de Haguenau, qui ont vécu sous un climat très-peu différent de celui de Halle, se soutient beaucoup mieux. Ainsi donc le climat a une influence positive sur l'épaisseur moyenne des couches, mais il n'en a aucune sur leurs variations accidentelles

et sur la vigueur de la végétation, examinée pendant toute la durée du végétal.

La distribution géographique du Pin sylvestre est une conséquence de cette double dépendance. En effet, tandis que certaines espèces européennes du même genre, telles que *Pinus alepensis*, *P. pinea*, *P. laricio*, sont pour ainsi dire parquées dans la zone tempérée de l'Europe, tandis que le *Pinus cembra* ne croît naturellement que dans les régions glacées de la Sibérie, et du Kamtschatka; ou sur les Alpes, l'Oural, les Carpathes et le Caucase, à des hauteurs variant entre 1500 et 2000 mètres [1], le *Pinus sylvestris* se trouve depuis la Perse septentrionale (lat. 36° N.) jusqu'au nord de la Laponie (lat. 70° N.) et de la Sibérie orientale par lat. 65°15', à l'embouchure de l'Ob dans la mer glaciale, contrée où le sol est toujours gelé à cinq mètres de profondeur [2]. L'espace qu'il occupe ne comprend pas moins de 34 degrés en latitude et 74 degrés en longitude. Il supporte également les climats continentaux et secs de la Sibérie, où des étés très-chauds succèdent à des hivers d'une rigueur extrême, et les climats marins et humides, à température égale de l'Irlande et de la Norwége. On le retrouve dans tous les pays intermédiaires compris entre les limites que nous avons indiquées, tels que la Grèce, l'Italie, la France, l'Allemagne, la Russie et la Péninsule scandinave; mais il ne prospère pas également partout, et si l'on examine quelles sont les conditions d'une belle venue, on verra qu'elles tiennent au sol d'abord, et ensuite à des éléments météorologiques autres que la température. Aussi partout où ces conditions sont réunies, l'homme conserve ou aménage les forêts de Pins; partout ailleurs il les néglige, les exploite comme bois de chauffage et les fait ainsi disparaître.

Examinons d'abord quelle est la nature du sol des belles forêts de l'Europe, de celles surtout où cet arbre acquiert des dimensions telles qu'il puisse servir de bois de construction. En Écosse [3], le Pin pros-

[1] Mirbel, *Distribution géographique des conifères*, Mémoires du Muséum, t. XIII p. 23.
[2] Erman, *Reise um die Erde*, tom. I, p. 634 et 636.
[3] Loudon, *Arboretum et Fruticetum britannicum*, t. IV, p. 2164.

père dans les terrains sablonneux ou très-légèrement argileux. Dans ceux où la couche la plus superficielle du sol est tourbeuse, le sous-sol est du gravier. C'est dans les terrains de transport de l'Aberdeenshire et dans des détritus granitiques, que sont plantées les belles forêts de Braemer et d'Abernethy. En France, le sol de la grande forêt de Haguenau est un sable siliceux frais, et contenant un peu d'humus. En Prusse, il en est de même. La présence du Pin indique un sol sec et léger. Les forêts de cette essence recouvrent d'une manière uniforme les collines sablonneuses qui règnent depuis Langenboese jusqu'à Danzig. Entre Koenigsberg et Memel, entre Munich et Ratisbonne, le Pin occupe les parties sablonneuses; mais dès que le sol devient plus humide ou plus compacte, il est remplacé par le Sapin (*Abies excelsa*, DC.). Pendant tout son voyage, depuis Berlin jusqu'aux bords de la mer Glaciale, à l'embouchure de l'Ob, M. Erman a fait la même remarque. En Suède, les magnifiques forêts de Pins des environs d'Upsal croissent dans un sol sablonneux; mais dès que le terrain est humide, le Bouleau et le Sapin deviennent l'essence dominante. Autour de Kaafiord, c'est sur les terrasses d'alluvion, dans le sol léger du penchant des montagnes, que prospère le Pin sylvestre et qu'il acquiert de belles dimensions; dès qu'il se trouve sur le roc nu il dégénère et se rabougrit.

Cette puissante influence du sol sur la croissance du Pin explique un phénomème de géographie botanique qui, depuis longtemps, avait frappé les voyageurs. En effet, le Pin et le Sapin s'avancent ensemble vers le Nord et s'arrêtent à peu près à la même limite, ou bien, si leur limite n'est pas la même, c'est le Pin qui s'approche le plus du pôle arctique. Dans les Alpes, au contraire, le Pin ne s'élève point sur le penchant des montagnes, et reste bien au-dessous du Sapin qui couronne leurs sommets ou couvre leurs flancs jusqu'à une grande hauteur. C'est au changement dans la nature du sol qu'il faut attribuer cette différence. Très-souvent, en effet, la limite du terrain de transport est aussi celle de la végétation du Pin à l'état d'arbre. Voici quelques exemples pris en Suisse, où nous les avons observés. Dans les plaines dont le

sol est alluvial comme aux environs de Bâle ou du lac de Thun, le Pin forme des forêts assez belles; mais il ne s'élève pas sur les montagnes, ou bien il se rabougrit, se couche sur le sol et forme la variété connue dans le pays sous le nom de *Krummholz*, et que Suter [1] a élevée au rang d'espèce, sous le nom de *Linus montana*. Mais les Pins en arbres à tronc droit cessent ordinairement dès que le sol n'est plus un terrain de transport ou bien un sable sec et léger. Sur les deux versants du Simplon, le Pin s'élève très-haut. Sur le versant septentrional on le trouve sans interruption, jusqu'à 1555 mètres au-dessus de la mer [2], et nous en avons encore observé un bouquet à 1800^{m} au-dessus de la mer près de la galerie de Kaltwasser. Au Sud, ils s'élèvent jusqu'à 1270 mètres. Aussi sur les deux versants, le sol est-il formé de sables micacés, dus à la décomposition des gneiss qui constituent le squelette de la montagne. Entre Stalden et Zerschmieden, dans la vallée de Saas, en Vallais, à 900 mètres au-dessus de la mer, on traverse un petit bois de Pins plantés dans un sable siliceux. Dans cette localité, le Pin s'arrête à la même hauteur que la vigne. Au-dessus de Sumvix, dans la vallée du Rhin postérieur, cet arbre couronne des caps formés de terrains de transport dont le sommet est à 1100 mètres au-dessus de la mer. En Piémont, dans le val Tornanche, il cesse à 870 mètres, c'est-à-dire au-dessous de la limite de la Vigne et des Noyers. Ainsi, comme on le voit, le Pin s'arrête en général bien au-dessous du Sapin, dont la limite moyenne peut être fixée à 1800 mètres environ.

Ce serait une grande erreur de croire que la rigueur du froid empêche cet arbre de s'élever plus haut, car nous avons vu qu'il végète sous le climat humide et avec les étés sans chaleur du Finmark, et qu'il supporte les étés courts, chauds et humides, suivis d'hivers secs et froids de la Sibérie asiatique.

Toutefois, il est d'autres circonstances météorologiques dont l'appréciation n'est point à négliger. C'est le vent et la neige. Le vent empêche les arbres de grandir et les couche sur le sol, comme on le voit

[1] *Flora helvetica*, t. II, p. 275.

[2] Cette mesure et les suivantes sont barométriques.

sur les bords de la mer. A Kaafiord même, qui est au fond d'un golfe étroit et profond, tous les Pins qui avaient crû dans des endroits découverts non abrités des vents d'Ouest, étaient rabougris et rampaient sur le sol. Un grand propriétaire de forêts en Norwége, assurait à M. White [1], que les Pins ne s'élancent que dans les plaines et lorsqu'ils sont réunis en forêts, parce qu'ils peuvent alors résister à l'effort des vents. Isolés ou sur des hauteurs près de la mer, ils se rabougrissent. Si le Sapin (*Epicea*) ne se rabougrit pas comme le Pin, c'est que son tronc est plus élastique, et que sa forme pyramidale ne s'oppose pas au rapprochement des arbres. Ils cèdent à l'effort du vent en se protégeant réciproquement, et relèvent la tête dès que la tourmente est passée. Le Pin, au contraire, forme des bois moins touffus, et le vent renverse ou brise les arbres écartés les uns des autres. Quand ils sont trop rapprochés, il en résulte, suivant M. Kasthofer [2], un autre inconvénient : la neige s'accumule entre les feuilles, et finit par former une couche épaisse et continue, qui fait plier les branches et couche le jeune massif qui ne se relève plus. Mais, ajoute le même auteur, si l'on soustrait cet arbre à l'action du vent et au poids des neiges, il supporte très-bien le froid et réussit encore au-dessus de la région de l'*Abies excelsa* et du *Pinus cembra*.

IX. — DE QUELQUES CONDITIONS ESSENTIELLES POUR OBTENIR EN FRANCE DES PINS PROPRES AUX CONSTRUCTIONS NAVALES.

Si l'on tentait quelques essais pour planter des forêts de Pins qui, par la suite des siècles, affranchiraient notre marine du tribut qu'elle paye à la Suède et à la Russie, peut-être ce mémoire pourrait-il fournir quelques indications utiles. En effet, pour que le Pin soit propre à être employé aux constructions navales, il faut qu'il réunisse les conditions suivantes :

1° Les troncs doivent être droits sur une longueur de 20 à 30 mètres et présenter un diamètre de 3 à 7 décimètres à leur base;

[1] Loudon, *l. c.*, p. 2170.
[2] *Guide dans les forêts*, t. I, p. 80 à 84.



2° Pour qu'ils aient l'élasticité requise, l'épaisseur moyenne des couches ne doit guère dépasser un millimètre; c'est celle des Pins de Geffle, qui sont si propres à la mâture. Si les couches sont plus épaisses, le bois est mou, spongieux, sans consistance et sans durée; si elles sont plus minces, il devient plus lourd et moins élastique.

On obtiendra une belle croissance en choisissant un terrain et une exposition convenables. En effet, si l'on fait des semis ou des plantations de Pins dans des localités où le terrain soit un sable siliceux sec mêlé d'humus ou seulement recouvert d'une légère couche de terre végétale, le Pin croîtra rapidement; mais il ne s'élancera pas, s'il n'est protégé contre les vents régnants par des massifs de montagnes et à l'abri des chutes d'avalanches et des inondations.

Pour remplir la seconde condition, c'est-à-dire pour que les couches annuelles aient une épaisseur d'un millimètre environ, il faut faire ces plantations à une hauteur telle, que le climat se rapproche autant que possible de celui de la région intermédiaire entre Hernoesand et Upsal, région qui fournit les Pins aux constructeurs de Geffle. Voici les températures moyennes de ces deux villes :

Upsal	Année	5,3
	Hiver	— 3,7
	Printemps	3,4
	Été	15,1
	Automne	6,2
Hernoesand.	Année	2,3
	Hiver	— 8,1
	Printemps	0,2
	Été	13,4
	Automne	3,6

Pendant l'hiver de ce pays, la végétation du Pin est complétement suspendue. Dans les plaines de la France, au contraire, cet arbre croît pendant tout le cours de l'année, et ses couches acquièrent quelquefois un centimètre d'épaisseur. Même à Haguenau, où les hivers sont plus

froids que dans la majeure partie de la France, l'épaisseur moyenne des couches annuelles est de $2^{mm},80$, c'est-à-dire presque triple de celle de Geffle. On voit donc qu'il faut s'élever sur les montagnes si l'on veut trouver un climat dont l'été soit assez court pour que la couche annuelle qui se forme n'ait en moyenne qu'un millimètre d'épaisseur, et l'hiver assez rude pour arrêter complétement la végétation.

En s'appuyant sur un travail dans lequel M. Kaemtz [1] a donné pour chaque mois de l'année le décroissement de la température avec la hauteur, déduit des observations de Genève comparées à celles de Saint-Bernard et de celles de 30 lieux situés en deçà et au delà des Alpes, on trouve que pour avoir un décroissement moyen de la température de 1° C., il faut s'élever :

En moyenne de	188^m
En hiver de.	230
Au printemps de	170
En été de	165
En automne de	187

Cela posé, quand on connaîtra les températures moyennes d'une ville située au pied d'une chaîne de montagnes, on saura à quelle hauteur on pourra faire avec avantage des plantations de Pins sylvestres propres aux constructions navales. Ainsi prenons les Vosges pour exemple. Le climat de Strasbourg est le suivant :

Strasbourg.	Année	9°,8
	Hiver	1,1
	Printemps.	10,0
	Été	18,1
	Automne	10,0

D'après cela, pour trouver un climat analogue à celui d'Upsal, il faudrait s'élever au-dessus de Strasbourg :

[1] *Vorlesungen ueber Meteorologie*, p. 244.



En moyenne de.	846^{m}
En hiver de.	1104
Au printemps de	1122
En été de	495
En automne de.	748

Or, Strasbourg étant lui-même à 144 mètres [1] au-dessus de la mer, c'est dans une zone comprise entre 800 et 1200 mètres qu'on pourrait espérer d'obtenir des arbres propres aux constructions navales, en choisissant convenablement le sol et l'exposition. A cette limite extrême de 1200^{m}, l'été serait assez chaud, car sa moyenne ne différerait que de 1°,7 à celle d'Hernoesand, et nous avons vu dans le cours de ce mémoire qu'il y avait encore de magnifiques Pins au nord de cette ville. Si l'on s'élevait plus haut, la violence des vents empêcherait les arbres de s'élancer; plus bas, la douceur des hivers n'arrêterait pas suffisamment leur végétation, et les couches annuelles deviendraient trop épaisses; ainsi donc, c'est dans les limites de la zone indiquée que les plantations devraient être faites. Toutefois on ne saurait se dissimuler l'infériorité des climats de montagnes, sur les climats des plaines du continent européen. En effet, ce qu'il faut pour que le Pin acquière un beau développement, c'est un été chaud de 13° à 14° en moyenne, et un hiver rigoureux, dont la moyenne est indifférente, pourvu qu'elle soit au-dessous de — 4°; mais, malgré ces désavantages, on aurait tort de se décourager, car de l'autre côté du Rhin, les Pins de la Forêt Noire servent aux constructions de la flotte hollandaise.

C'est surtout dans les départements des hautes Alpes et de l'Isère qu'on devrait faire des plantations de Pins. Les vallées que parcourent la Durance, l'Ubaye, le Drac, la Romanche, l'Arc et l'Isère, sont remplies de terrains de transport souvent disposés en terrasses; mais le manque de données hypsométriques et climatologiques sur les villes de Grenoble, Briançon, Gap, Embrun ou Barcelonette, empêche de

[1] *Annuaire du bureau des longitudes* 1840, p. 247.

donner des limites altitudinales bien précises. Toutefois nous savons que Briançon est à 1306 mètres au-dessus de la mer; or, en prenant pour points de départ les températures moyennes de Genève et d'Avignon, et en tenant compte des différences latitudinales et hypsométriques des trois villes, on trouve que la moyenne annuelle de Briançon doit s'élever peu au-dessus de 6 degrés. C'est donc aux environs de cette ville, et jusqu'à une hauteur de 500^{m} au-dessus, qu'on devrait tenter des plantations de Pins. Est-il besoin d'ajouter que ces données ne sont que des indications destinées à guider un forestier instruit, indications que son expérience et l'inspection des lieux pourront modifier à l'infini. Heureux si ce mémoire renferme quelques vues utiles, et surtout s'il pouvait contribuer à éveiller la sollicitude du gouvernement sur l'indispensable nécessité de reboiser nos montagnes dans l'intérêt du commerce, de la marine et de l'agriculture.

NOTES.

NOTE *A*, P. 6.

Les arbres sur lesquels nous avons effectué des mesures n'ont point été coupés précisément à l'expiration de l'une de nos périodes conventionnelles de 10, 25 ou 50 ans; leur âge n'est pas un multiple exact de ces nombres 10, 25 et 50. Il reste des *bouts de rayon excédants,* que nous avons utilisés dans l'intérêt de l'exactitude de nos moyennes. Ainsi dans la colonne 125-150 du tableau II, les six arbres portant les numéros 23, 24, 25, 26, 27 et 28, fournissent les épaisseurs *excédantes* $12^{mm},1$, $15^{mm},1$.... Le signe + placé devant un des nombres du tableau indique que ce nombre appartient à cette catégorie. Dans le cas actuel, la somme des six nombres est $90^{mm},8$, tandis que la somme totale des années correspondantes vaut $16+19+19+23+24=125$. Chacun de ces six derniers nombres est le reste arithmétique de la division de l'âge de l'arbre par le nombre 25.

Pour former la moyenne des nombres de la colonne 125-150 de ce même tableau, nous ajoutons à la somme $194^{mm},1$, des douze accroissements des arbres n°s 29 à 40, la somme des bouts excédants ou $90^{mm},8$; mais en même temps nous augmentons le diviseur 12 d'un nombre égal au résultat, *entier ou fractionnaire,* de la division de 125 par 25; ici ce résultat est égal à 5,0, de sorte que le diviseur définitif est égal à $12+5,0$ ou 17,0. Les diviseurs ainsi obtenus sont écrits dans une rangée spéciale au bas de chaque tableau, et un seul coup d'œil sur cette rangée indique quel degré de précision l'on peut attendre de chaque moyenne; ces moyennes étant d'autant plus exactes que le diviseur est lui-même un nombre plus considérable.

Il faut remarquer maintenant que les croissances partielles, $12^{mm},1$, $15^{mm},1$.... de la colonne déjà prise pour exemple, correspondent à une époque de la vie de l'arbre un peu moins avancée que l'âge moyen auquel correspondent les accroissements des arbres n°s 29 à 40. Pour ces derniers, l'âge moyen dont il s'agit ici est de $125 + \frac{1}{2}.25$ ou 137,5 années; mais pour les six arbres *à âges incomplets,* ce même âge moyen vaut seulement $125 + \frac{1}{2}(20,8)$ ou 135,4 années : le

nombre 20,8 est le résultat de la division de 125 par le nombre de ces arbres, c'est-à-dire par le nombre 6. Or, l'accroissement diminue à mesure que l'arbre avance en âge; la croissance à 135 ans est un peu plus forte que celle qui a lieu à 137. Ainsi il faut faire subir à l'accroissement total de ces six arbres une correction fondée sur cette remarque, et diminuer d'une petite quantité le nombre 90,8; cette correction a été faite; elle est en général faible, mais elle peut dans certains cas s'élever à plusieurs millimètres : il nous paraît superflu de donner de plus amples détails sur la manière dont nous avons appliqué cette correction. Les sommes des croissances excédantes, préalablement corrigées, sont disposées dans une rangée horizontale particulière sous le titre de « *Accroissements additionnels.* » Une autre rangée donne la somme de tous les nombres de chaque colonne, compris entre les deux barres, l'une supérieure, l'autre inférieure, de cette colonne. En dessous est le diviseur obtenu par le procédé que nous venons d'indiquer, et enfin le quotient, sous le titre de « *Épaisseur moyenne* », indique l'accroissement moyen du rayon pendant la période que l'on considère.

NOTE *B*, P. 6.

Nous avons dit, dans le texte, que l'on pouvait être tenté de déduire le rayon moyen aux divers âges des tableaux fictifs que nous nommons tableaux n° 2, et dont nous avons indiqué le mode de construction dans le cours du mémoire. Nous allons discuter ici cette méthode et prouver qu'elle est vicieuse, et doit être rejetée.

Si les vingt-sept Pins du tableau de Geffle, que nous allons prendre pour exemple, avaient tous été abattus au même âge, par exemple à l'âge de 300 ans, aucune objection ne pourrait s'élever contre les moyennes déduites des tableaux n° 2. Malheureusement il n'en est point ainsi : un certain nombre d'arbres a été frappé par la hache avant d'avoir atteint l'âge supposé. Les Pins n°s 41, 42, 43.... (voir le tableau III) ne concourent pas à la formation des moyennes relatives aux dernières périodes de la vie des autres arbres; les accroissements qu'auraient eus ces Pins dans leurs dernières années sont inconnus, et les places correspondantes restent en blanc dans nos colonnes. Il est donc impossible de les restituer; mais il est permis de faire sur la valeur présumable de ces nombres des suppositions plus ou moins légitimes : il en est d'autres qui, en tous cas, doivent être rejetées. C'est ce que nous allons montrer par un exemple. Supposons que l'on n'ait mesuré à Geffle que les Pins n°s 41 et 42; on aura obtenu les résultats suivants :

RAYON A L'AGE DE	25 ANS.	50 ANS.	75 ANS.	100 ANS.
Pin n° 41	88,8	149,1	206,1	»
Pin n° 42	34,1	63,3	112,0	149
MOYENNES	61,45	106,2	158,65	149 !

Le résultat auquel nous arrivons ainsi est évidemment impossible; car le *Pin moyen* ne peut avoir, à 100 ans, un rayon moindre qu'à l'âge de 75 ans. En réfléchissant à la cause de ce ré-

sultat, on voit que le nombre laissé en blanc dans la dernière colonne à droite a une limite en moins, une limite au-dessous de laquelle il ne saurait s'abaisser. Cette limite est le nombre 206,1, valeur du rayon de l'arbre n° 41 à l'âge de 75 ans. Ainsi le nombre laissé en blanc, faute d'observation, est nécessairement de la forme $206,1+x$; x indiquant un nombre positif, inconnu d'ailleurs. Si nous substituons cette valeur dans la dernière colonne, la moyenne de cette colonne n'est plus égale à 149; elle devient $177,55 + \frac{1}{2}x$, nombre plus grand que 158,65, et l'anomalie signalée disparaît.

En généralisant ce que nous venons de dire pour le cas simple de deux Pins, en nous reportant à la série complète des vingt-sept arbres de Geffle, nous voyons qu'il ne saurait être permis de prendre les moyennes des nombres inscrits dans chacune des dernières colonnes du tableau III, n° 2, sans tenir compte en même temps des lacunes qui existent dans le haut de ces colonnes, et sans apprécier la croissance antérieure plus ou moins vigoureuse des arbres que le nombre trop restreint de leurs couches élimine de ces colonnes. En prenant des moyennes en dehors de ces circonstances, l'on ne peut attribuer à la série des rayons moyens ainsi obtenus une valeur rigoureusement exacte. Dans les séries de Pello et de Geffle, la croissance des Pins les plus jeunes a été en général supérieure à la croissance correspondante des Pins coupés dans un âge plus avancé. Le rayon moyen déduit des tableaux n° 2, est donc trop faible, par suite de la même cause qui, dans l'exemple fictif cité ci-dessus, nous a conduits à un rayon moyen égal à 149, tandis que sa véritable valeur était au moins égale à 177,55. Il n'est donc pas étonnant que le rayon moyen déduit du tableau III, n° 2 (voir tableau V), se trouve plus petit dans la colonne 200 ans, que dans la colonne précédente, relative à 175 ans, quoique ce résultat soit évidemment impossible. En parcourant attentivement le tableau V, on reconnaîtra que la série des *rayons moyens déduits des tableaux n° 2,* est toujours moins régulière que la série des véritables *rayons moyens.*

Dans la méthode que nous avons suivie dans le mémoire, nous ne raisonnons pas directement sur les rayons moyens, mais seulement sur leurs accroissements d'une période à la suivante. Des difficultés pareilles aux précédentes peuvent-elles s'élever contre cette manière d'agir? Nous ne le pensons pas. En effet, reprenons l'exemple déjà cité des Pins n°s 41 et 42, et formons le petit tableau ci-joint :

Accroissement	0-25 ans.	25-50 ans.	50-75 ans.	75-100 ans.
Pin n° 41	88,8	60,3	57,0	»
Pin n° 42	34,1	29,2	47,9	37,8
Moyenne.	61,45	44,75	52,45	37,8

La supposition la plus légitime que l'on puisse faire sur le nombre laissé en blanc dans ce tableau, consiste à lui assigner pour sa valeur l'accroissement 37,8 fourni par le Pin n° 42. Mais, dira-t-on, puisque la croissance du Pin n° 41 a constamment surpassé celle du Pin n° 42, pendant les 75 premières années de sa vie, n'est-il pas naturel de supposer que cette supériorité continuera pendant les 25 années suivantes? Nous avons discuté cette manière de voir dans le



cours du mémoire, et nous avons montré qu'elle n'était pas exacte. *La rapidité plus ou moins grande de l'accroissement de l'arbre dans son jeune âge ne préjuge rien sur sa croissance ultérieure.* Du moins si une telle influence existe, si le passé réagit sur l'avenir, cette influence très-faible peut être négligée. Ainsi la réintégration des nombres manquants, si elle était possible, ne tendrait pas à changer, dans un sens déterminé d'avance, le chiffre de l'épaisseur moyenne des couches dans un âge avancé. Les épaisseurs moyennes inscrites au bas de nos tableaux peuvent donc pécher aussi bien par excès que par défaut, et si elles sont moins exactes pour un âge avancé que pour le jeune âge, c'est uniquement parce qu'un moindre nombre d'observations a concouru à les déterminer.

Note *C*. p. 8.

Nous avons d'abord essayé de représenter la loi d'accroissement par la relation plus compliquée

$$r = \frac{an + a'n^2}{1 + bn};$$

mais, en voulant appliquer cette formule aux observations de Halle et de Kaafiord, nous avons été conduits à admettre

$$a' = o,$$

ce qui nous a ramenés à la forme adoptée dans le mémoire. Selon que a' est égal ou non à zéro, la courbe d'accroissement offre l'une ou l'autre des deux particularités suivantes. Dans le dernier cas, l'asymptote de la branche ascendente est oblique à l'axe horizontal, tandis que, a étant égal à zéro, cette asymptote devient elle-même horizontale. Dans le cas d'obliquité, l'accroissement annuel tend à la longue à devenir constant; dans le cas de l'asymptote horizontale, cet accroissement tend sans cesse à devenir de plus en plus petit; les deux suppositions sont également admissibles *à priori*; mais la seconde est probablement la seule légitime. En tous cas, la courbe d'accroissement est toujours *une hyperbole.*

Note *D*. p. 10.

On peut calculer directement l'accroissement de l'arbre pendant une période d'un nombre d'années égal à l, c'est-à-dire, depuis l'âge n jusqu'à l'âge $n+l$. On aura pour l'accroissement total du rayon

$$\frac{al}{(1 + bn)\,[1 + b\,(n + l)]}$$

ou, sous une forme plus simple, quoique moins exacte,

$$\frac{al}{[1 + b(n + \frac{1}{2} l)]^2}.$$

NOTE *E*. P. 10.

Au lieu de représenter les accroissements décennaux des Pins de Halle par la formule

$$\frac{10a}{[1 + b(n + 5)]^2},$$

expression qui rentre dans la formule générale $\frac{a'}{(1+b'n)^2}$, nous avons essayé de représenter ces mêmes accroissements par une expression de la forme $\frac{a'}{1+b'n}$. Nous avons déterminé a' et b' par la méthode des moindres carrés des erreurs des accroissements, celles-ci étant préalablement divisées par les accroissements qui leur correspondent. Nous avons trouvé de la sorte $a'=36,8$ $b'=0,033$. D'après cette manière d'opérer, l'accroissement décennal aurait pour valeur

$$\frac{36^{mm},8}{1 + 0,33\, n}.$$

Pour déduire de là la valeur du rayon r en fonction de l'âge, il faut recourir aux méthodes compliquées du *calcul des différences*, et au *théorème d'Euler*. On arrive à une équation de la forme

$$r = \alpha \log.(1 + b'n) + \frac{\beta n + \gamma n^2}{(1 + b'n)^2}.$$

Cette équation a le grave inconvénient de ne pas être comparable avec les formules qui conviennent aux trois premières stations. C'est à l'expérience à décider si l'hyperbole perd, dans des latitudes moins boréales, la propriété de représenter l'accroissement des Pins avec une exactitude suffisante. Les observations faites à Haguenau tendent à prouver qu'il en est ainsi.

NOTE *F*. P. 10.

Quoique les coefficients a et b tels que nous venons de les déterminer, soient ceux qui repré-



sentent le mieux les observations faites, il serait inexact d'attacher une confiance trop absolue à ces valeurs. Nous estimons que pour Kaafiord et Geffle, le coefficient *a* est connu à la précision d'un trentième de sa valeur, et le coefficient *b* à la précision d'un huitième de la sienne. Il faudrait recourir à la théorie des probabilités pour déterminer exactement ce degré de précision.

Note *G*. p. 11.

D'après notre formule, la formation du bois devient nulle sous le 79ᵉ parallèle. M. Böeker, dans son ouvrage intitulé : *Om skogars skötsel i norden Abo*. 1829, donne une formule empirique destinée à représenter le volume en pieds cubes du bois de pin, produit annuellement par chaque arpent de terre sous diverses latitudes ; cette formule est $434{,}05 - 5{,}541 - 0{,}00043\ L^2$; L est le nombre de degrés de la latitude. D'après cette formule, la production du bois deviendrait nulle sous le 78ᵉ degré, ce qui s'accorde assez bien avec notre résultat.

Note *H*. p. 13.

Cette formule n'est pas bien rigoureuse. L'expression

$$\frac{a}{[1 + b(n + \frac{1}{2})]^2}$$

représente plus exactement l'épaisseur cherchée de la $n+1^e$ couche ; mais la formule donnée dans le texte est suffisante.

Note *I*. p. 19.

Cet écart moyen jouit de propriétés remarquables que lui assigne le calcul des probabilités. En voici quelques-unes que nous allons indiquer sans démonstration.

Si nous partageons en deux groupes égaux la série des nombres qui concourent pour fournir une moyenne, de façon que l'un de ces groupes comprend tous les nombres les plus forts, et l'autre tous les nombres les plus faibles. Si nous calculons ensuite les deux moyennes partielles relatives à chacun de ces deux groupes, elles différeront de la moyenne générale, en plus et en moins, d'une quantité égale à l'écart moyen. Ainsi dans la colonne 0—50 (tableau I), l'écart moyen est $16^{mm},57$; la grosseur moyenne est représentée par $50^{mm},25$; celle des dix Pins les plus



gros sera à très-peu près $50^{mm},25+16^{mm},57$ ou $66^{mm},82$; celle des dix Pins les moins gros sera de même à très-peu près égale à $50^{mm},25-16^{mm},57=33^{mm},68$.

La probabilité que l'écart fourni par une observation isolée sera moindre que l'écart moyen, peut être exprimée, dans tous les cas, par la fraction 0,575, la probabilité contraire étant égale à 0,425. Ainsi, dans l'exemple précédent, on pourra parier 575 contre 425 qu'un Pin de 50 ans pris au hasard à Kaafiord, aura un rayon intermédiaire entre $33^{mm},68$ et $66^{mm},82$.

Mais la propriété la plus importante dont jouisse l'écart moyen est de servir à mesurer le degré de précision auquel atteint la moyenne générale, *puisque cet écart moyen, divisé par la racine carrée du nombre* N *des observations, donne la moyenne erreur dont la moyenne de ces* N *observations reste passible.* On entend par cette *moyenne erreur*, la moyenne idéale de toutes les erreurs également possibles, de même que l'*écart moyen* est la moyenne de tous les écarts également possibles. Ainsi dans l'exemple déjà cité au commencement de cette note, veut-on connaître l'*erreur moyenne* qui peut exister sur le rayon moyen $50^{mm},25$? On l'obtiendra en divisant l'écart moyen $16^{mm},57$ par la racine carrée du nombre 20 : le quotient est $3^{mm},71$. Il y a donc 575 à parier contre 425 que la vraie moyenne, celle que l'on déduirait d'un nombre excessivement grand d'observations pareilles, tomberait entre $50^{mm},25-3^{mm},71$ et $50^{mm},25+3^{mm},71$, c'est-à-dire, entre $46^{mm},54$ et $53^{mm},96$.

Il faut cependant remarquer que cette dernière proposition n'est rigoureusement vraie que dans le cas où les nombres $95^{mm},1$, $38^{mm},2$, $60^{mm},7$... qui composent la colonne 0—50 (tableau I), peuvent eux-mêmes être considérés comme étant le résultat moyen de plusieurs observations indépendantes l'une de l'autre. Mais cette condition est satisfaite dans le cas actuel; car le nombre 95,1 est la somme de cinquante épaisseurs de couches annuelles successives; divisé par 50, ce nombre donnera la *moyenne* d'une épaisseur unique. Il est donc le produit d'une *moyenne épaisseur* par un facteur constant, par le nombre 50. Il en est de même de tous les autres nombres 38,2, 60,7.....; la loi citée leur est donc applicable.

Note *K*. p. 21.

Ainsi, d'après les principes du calcul des probabilités, si la mesure d'un seul arbre donne l'accroissement semi-séculaire à 0,20 près, la moyenne des mesures de 25 arbres donnera ce même accroissement à $\frac{0,20}{\sqrt{25}}=0,04$ près, c'est-à-dire à $\frac{1}{25^{me}}$ de sa valeur, et il faudrait mesurer 400 arbres pour avoir l'accroissemeut à un centième près.

Note *L*. p. 22.

Il est bon de remarquer que ce rapport 0,563 diffère très-peu du rapport théorique 0,575 (voir la note *I*); ce qui justifie notre manière de considérer l'accroissement semi-séculaire



comme étant égal à 50 fois la moyenne de 50 accroissements partiels, indépendants l'un de l'autre.

NOTE *M*. P. 23.

La formnle $\frac{2}{\sqrt{i}}$, suivant laquelle l'écart moyen est en raison inverse de la racine carrée du nombre des observations, est conforme à la théorie, dès que l'on considère chaque accroissement comme étant une moyenne, et non un nombre isolé, résultat brut d'une observation unique. Au moyen de cette formule, on peut déterminer l'âge probable d'un arbre dont le demi-diamètre R est connu.

Au rayon R correspond dans nos formules un certain âge m. Si l'arbre soumis à notre examen avait crû sur le modèle du *Pin moyen* de la localité, m représenterait le véritable âge de l'arbre. L'on a pour déterminer ce nombre m la formule

$$R = \frac{am}{1 + bm},$$

où R, a et b sont des quantités connues, m restant la seule quantité à déterminer; on en conclura

$$m = \frac{R}{a - bR}.$$

C'est l'âge le plus probable; mais néanmoins il n'est pas vraisemblable que l'âge réel soit précisément égal à m. L'on demandera donc, n_0 et n_1 étant deux nombres assignés d'avance, quelle est la probabilité pour que le nombre des années de l'arbre tombe entre n_0 et n_1. Appelons n cet âge réel de l'arbre, quelle que soit sa valeur. Appelons r_n le rayon moyen qui lui correspond, de sorte que l'on ait

$$r_n = \frac{an}{1 + bn}.$$

L'écart réel entre le Pin observé et le Pin moyen sera $R - r_n$.

Comparons cet écart avec l'écart moyen qui est propre aux arbres de l'âge n, écart moyen que nous désignerons par ε_n. D'après ce que nous avons dit dans le texte, nous aurons

$$\varepsilon_n = r_n \frac{K}{\sqrt{n}};$$

K étant un facteur constant qui, pour le Pin sylvestre, est sensiblement égal à 2. Quelle est maintenant, dans l'hypothèse de l'âge n, la probabilité pour que le rayon de l'arbre soit compris



entre R—i et R+i, i étant une longueur très-petite, par exemple égale à 1 millimètre [1]? Le calcul répond à cette question, en montrant que cette probabilité a pour valeur

$$\frac{2i}{\pi\varepsilon_n}\, e^{-\frac{1}{\pi}\left(\frac{R-r_n}{\varepsilon_n}\right)^2},$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre, et e la base du système népérien. Remplaçons R, r_n, ε_n par leurs valeurs conclues des équations précédentes, et posons pour abréger

$$\pi K^2 (1 + bm)^2 = \frac{1}{\alpha}.$$

Cette probabilité deviendra

$$\frac{2i}{\pi a K}\left(n^{-\frac{1}{2}} + bn^{\frac{1}{2}}\right) e^{-\alpha(n+m^2n^{-1})},$$

Faisons maintenant une autre hypothèse sur l'âge de l'arbre; admettons qu'il soit égal à n'; la probabilité d'un rayon compris entre R—i et R+i, dans cette nouvelle hypothèse, aura pour valeur l'expression précédente, dans laquelle il aura suffi de remplacer n par n'. On pourrait de même essayer un troisième âge n'', et ainsi de suite. On sait d'autre part que la vraisemblance de ces diverses hypothèses est mesurée par la probabilité que chacune d'elles assigne à l'événement arrivé, lequel est ici, en définitive, la sortie du rayon R. Ainsi la probabilité de l'âge n sera proportionnelle au nombre

$$\left(n^{-\frac{1}{2}} + bn^{\frac{1}{2}}\right) e^{-\alpha(n+m^2n^{-1})};$$

celle de l'âge n' sera proportionnelle au nombre

$$\left(n'^{-\frac{1}{2}} + bn'^{\frac{1}{2}}\right) e^{-\alpha(n'+m^2n^{-1})},$$

et ainsi de suite. On peut supprimer le facteur $\frac{2i}{\pi a K}$, qui reste le même dans les quantités que l'on compare entre elles.

Représentons maintenant par $\varphi(n)$, $\varphi(n')$.... les diverses valeurs de ces nombres successifs, et cherchons à déterminer le nombre qui mesure la probabilité pour que l'âge de l'arbre tombe entre les valeurs $n=n_o$, $n=n_1$, et celui qui mesure la probabilité pour que l'âge de l'arbre tombe entre les valeurs $n=o$ et $n=\infty$; cette dernière probabilité équivaut à la certitude, et a pour valeur l'unité. Nous pourrons représenter ces deux nombres par les formes symboliques bien connues des mathématiciens :

$$\Sigma_{n_o}^{n_1}\, \varphi(n), \quad \Sigma_o^{\infty}\, \varphi(n).$$

[1] C'est à peu près le degré de précision dont nous pouvons répondre sur la mesure du rayon R.

Soit donc X la probabilité définitive de l'événement attendu, lequel est ici $n > n_0$ et $< n_1$. L'on pourra établir la proportion :

$$X : 1 :: \Sigma_{n_0}^{n_1} \varphi(n) : \Sigma_0^{\infty} \varphi(n).$$

Donc l'on a

$$X = \frac{\Sigma_{n_0}^{n_1} \varphi(n)}{\Sigma_0^{\infty} \varphi(n)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$X = \frac{\int_{n_0}^{n_1} \varphi(n)\,dn}{\int_0^{\infty} \varphi(n)\,dn}.$$

La difficulté est donc ramenée à la résolution de l'intégrale suivante

$$\int (n^{-\frac{1}{2}} + bn^{\frac{1}{2}})\, e^{-\alpha(n+m^2n^{-1})}\, dn.$$

Pour la résoudre, posons $n = y^2$; elle devient

$$2\int (1+by^2)\, e^{-\alpha(y^2+m^2y^{-2})}\, dy.$$

Or, M. Binet a donné dans les *Comptes rendus de l'Institut de France* (tom. XII, pag. 958) les moyens d'intégrer cette expression en la ramenant aux fonctions ordinaires algébriques et à l'intégrale

$$\int_0^u e^{-u^2}\, du,$$

dont on possède des tables suffisamment étendues. Ainsi le problème de la détermination de la probabilité de tel ou tel âge pour l'arbre de rayon R n'est pas au-dessus des forces actuelles de l'analyse mathématique ; mais nous croyons inutile de développer les formules compliquées auxquelles conduirait un calcul rigoureux. Bs.

TABLEAUX.

TABLEAU I.

PINS MESURÉS A KAAFIORD.

Lat. 69°57′ N. Long. 20°40′ E.

Nos d'ordre.	OBSERVATrs.	ÂGE.	Demi-DIAMÈT.	ÉPAISSEUR DES COUCHES EN MILLIMÈTRES.						
				0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
1	M.	103	144,7	95,1	48,4	+ 1,2				
2	M.	170	128,6	38,2	52,4	31,9	+ 6,1			
3	M.	183	157,1	60,7	47,7	32,2	+16,5			
4	M.	196	187,4	51,3	54,8	41,2	+40,1			
5	B.	200	129,8	16,6	38,1	42,6	32,5			
6	J.	200+x	124,5	44,0	11,3	34,8	29,5			
7	J.	209+x'	224,0	77,7	56,1	34,8	31,8			
8	M.	208	168,0	27,4	51,4	52,4	31,3	+ 5,5		
9	M.	213	131,5	33,6	30.9	40,1	20,2	+ 6,7		
10	M.	215	142,0	30,4	36,2	39,6	19,0	+16.8		
11	M.	219	162,5	65,0	34,6	32,6	18,1	+12,2		
12	M.	226	176,0	45,0	38,8	48,8	27,3	+16,1		
13	M.	229	153,0	50,8	43,7	19,2	28,0	+11,3		
14	J.	231+x''	228,0	78,2	35,4	50,8	35,6	+14,0		
15	B.	258	158,5	58,3	27,7	27,1	14,5	9,6	+ 1,3	
16	M.	285	199,0	68,0	54,4	16,6	23,4	22,6	+14.0	
17	B.	300+x'''	158,7	50,9	27,6	18,3	16,8	21,5	20,4	
18	M.	321	196,2	33,3	58,7	38,0	16,5	18,8	23,3	+ 7.6
19	J.	350	260,3	62,5	61,2	35,0	28,8	29,8	27,5	15,5
20	B.	375	135,0	18,1	53,8	23,4	14,8	14,7	10,6	13,1
Accroissements additionnels. .				0,0	0,0	+ 1,1	+59,6	+76,6	+15,0	+ 7,0
Sommes générales				1005,1	843,2	660,5	447,7	193,6	96,8	35,6
Diviseurs				20,0	20,0	19.06	18,08	8.82	4,86	2,42
Épaisseurs moyennes				50.25	42.16	34,65	24,77	21,95	19,92	14,70
Épaisseurs calculées				51,98	41,60	32,60	26,74	22.34	18,95	16,26
Différences				+ 1,73	— 0,56	— 2,05	+ 1,97	+ 0,39	— 0,97	+ 1,56

TABLEAU II.

PINS MESURÉS A PELLO.

Lat. 66° 48′ N. Long. 21° 40′ E.

N° d'ordre.	OBSERVATrs.	ÂGE.	Demi-DIAMÈT.	ÉPAISSEUR DES COUCHES EN MILLIMÈTRES.								
				0-25	25-50	50-75	75-100	100-125	125-150	150-175	175-200	200-225
21	B.	90	101,5	39,1	27,2	20,4	+14,8					
22	M.	100	144,0	51,6	37,9	37,2	17,3					
23	M.	141	157,0	23,5	45,2	33,1	18,9	24,2	+12,1			
24	M.	144	161,0	40,8	46,5	26,9	18,0	13,3	+15,1			
25	M.	144	164,0	44,3	55,2	35,5	17,1	6,4	+ 5,5			
26	M.	148	165,0	33,5	38,9	33,2	24,6	14,2	+20,6			
27	M.	149	137,0	19,3	23,2	21,1	22,8	21,0	+29,6			
28	B.	149	132,0	44,3	38,5	21,1	13,5	7,7	+ 7,9			
29	M.	151	135,0	42,4	25,6	21,0	18,5	12,9	13,8	+ 0,8		
30	M.	151	158,0	44,8	35,7	21,5	14,6	20,2	20,4:	+ 0,8		
31	B.	153	147,0	34,8	44,9	21,1	20,4	12,9	11,7	+ 1,2		
32	B.	155	162,0	49,5	44,2	21,4	18,8	6,5	19,6	+ 2,0		
33	M.	157	127,0	30,0	21,8	12,6	17,9	17,9	20,5	+ 6,3		
34	M.	159	141,0	31,0	30,2	20,7	21,2	17,2	15,9	+ 4,8		
35	B.	166	143,0	29,6	29,7	17,6	25,7	16,1	12,4	+11,9		
36	M.	170	134,0	32,8	29,0	22,9	18,9	16,2	8,9	+ 5,2		
37	B.	179	157,0	38,3	36,0	22,5	15,4	21,8	14,1	8,0	+ 0,9	
38	B.	190	143,0	37,5	20,7	10,8	10,4	24,6	15,2	15,3	+ 8,5	
39	B.	200	162,0	27,9	35,7	27,7	19,4	15,3	16,4	10,4	9,2	
40	M.	240+y	201,0	37,2	34,2	15,9	14,6	18,7	17,3	19,4	17,9	12,7
Accroissements additionnels. .				0,0	0,0	0,0	+14,1	0,0	+90,0	+30,3	+ 9,4	»
Sommes générales				732,2	700,3	464,2	362,1	287,1	284,1	83,4	36,5	»
Diviseurs.				20,0	20,0	20,0	19,6	18,0	17,0	6,48	2,76	»
Épaisseurs moyennes.				36,61	35,01	23,21	18,48	15,95	16,71	12,87	13,22	12,7:
Épaisseurs calculées				38,41	30,48	24,78	20,54	17,31	14,77	12,77	11,14	
Différences.				+ 1,80	— 4,53	+ 1,57	+ 2,06	+ 1,36	— 1,94	— 0,10	— 2,08	

TABLE

PINS MESUR

Lat. 60° 40′ N.

Nos d'ordre.	OBSERVAT.	ÂGE.	Demi-DIAMÈTRE.	ÉPAISSEUR DES COUCHES						
				0-25	25-50	50-75	75-100	100-125	125-150	150-175
41	M.	92	250,0	88,8	60,3	57,0	+44,0			
42	B.	117	165,0	34,1	29,2	47,9	37,8	+16,0		
43	M.	138	200,4	35,0	30,4	45,0	31,8	43,2	+15,0	
44	B.	138	230,0	39,5	37,4	76,2	36,0	28,5	+11,5	
45	B.	141	265,0	58,5	37,0	42,2	48,0	50,0	+29,6	
46	B.	142	287,6	68,0	84,6	38,6	42,4	36,4	+17,8	
47	M.	158	245,7	113,1	51,2	31,3	22,6	14,8	10,1	+ 2,6
48	M.	171	300,0	61,8	88,3	47,8	34,5	21,3	31,9	+14,3
49	M.	172	274,0	23,0	51,0	62,5	27,2	21,8	48,1	+40,5
50	M.	174	284,0	71,7	56,8	61,1	39,7	20,0	17,2	+17,5
51	M.	179	228,0	28,0	27,2	33,5	44,2	43,5	23,5	23,5
52	M.	182	294,0	92,6	41,2	61,0	39,6	25,0	14,6	16,6
53	M.	184	231,6	87,0	45,0	27,7	15,9	17,0	14,5	16,7
54	M.	190	260,0	60,5	45,8	30,2	24,0	29,0	24,5	32,5
55	B.	194	275,8	81,2	68,8	34,0	14,5	30,0	16,7	14,0
56	M.	196	376,0	50,8	59,4	69,3	57,5	49,5	41,1	30,6
57	M.	197	272,0	49,6	48,1	46,8	47,3	33,2	24,2	15,2
58	M.	205	225,0	44,9	36,4	31,9	34,9	24,7	19,6	16,9
59	M.	211	290,0	31,1	61,3	58,1	45,5	31,5	24,5	16,3
60	B.	254	216,3	19,7	18,9	40,7	36,0	28,2	19,3	13,6
61	M.	256	277,0	41,5	27,4	27,8	25,0	29,4	23,6	25,8
62	B.	258	280,0	78,0	38,6	26,5	24,0	31,3	30,5	18,2
63	M.	264	266,5	40,4	25,0	17,0	21,2	21,8	37,1	27,0
64	M.	292	280,0	65,8	50,4	33,6	24,0	21,0	16,8	12,7
65	B.	314	232,0	18,2	12,6	14,2	16,0	14,0	16,5	31,5
66	M.	373	310,0	48,0	51,2	24,8	20,7	16,4	13,1	15,8
67	M.	430	315,3	39,8	21,3	9,8	29,5	30,1	26,2	26,5
Accroissements additionnels.				0,0	0,0	0,0	+42,7	+15,7	+71,6	+73,4
Sommes générales				1470,6	1204,8	1096,5	882,5	724,3	565,2	426,8
Diviseurs				27,0	27,0	27,0	26,68	25,68	23,36	20,04
Épaisseurs moyennes				54,47	44,62	40,61	33,07	28,20	24,20	21,30
Épaisseurs calculées.				55,16	45,58	38,31	32,64	28,14	24,52	21,55
Différences				+ 0,57	+ 1,04	— 2,30	— 0,43	— 0,06	+ 0,32	+ 0,25

AU III.

ÉS A GEFFLE.

Long. 14° 50′ E.

	EN MILLIMÈTRES.									
	175-200	200-225	225-250	250-275	275-300	300-325	325-350	350-375	375-400	400-425
	+ 4,6									
	+ 3,5									
	+ 7,8									
	+ 13,2									
	+ 16,6									
	+ 17,8									
	+ 7,6									
	13.7	+ 2,1								
	14,0	+ 7,4								
	13,6	12,8	11,5	+ 2,0						
	23,2	24,7	24,2	+ 4,5						
	11,4	,0	9,9	+ 3,5						
	23,2	21,3	14,7	+ 10,8						
	11,7	8,3	13,4	11,4	+ 10,8					
	34,2	24,3	19,1	13,4	12,0	+ 6,0				
	23,5	19,5	16,9	14,0	11,7	10,9	13,7	+ 9,7		
	14,6	13,1	16,8	14,4	13,3	12,1	12,1	12,1	12,8	8,0
	+ 69,0	+ 9,1	0,0	+ 20,1	+ 10,6	+ 5,9	0,0	+ 9,7	»	»
	252,1	141,1	126,5	73,3	47,6	28,9	25,8	21,8	»	»
	13,88	8,64	8,0	5,28	3,68	2,56	2,0	1,92	»	»
	18,17	16,33	15,81	13,88	12,93	11,29	12,90	11,35	10,4 :	
	19,10	17,03	15,29	13,79	12,51	11,41	10,43	9,58	»	
	+ 0,93	+ 0,70	— 0,52	— 0,09	— 0,42	+ 0,1 2	— 2,47	— 1,77	»	

TABLEAU IV.

PINS MESURÉS A HALLE.

Lat. 51° 30′ N. Long. 9° 40′ E.

NUMÉROS.	OBSERVATrs.	ÂGE.	Demi-DIAMÈT.	ÉPAISSEUR DES COUCHES EN MILLIMÈTRES.									
				0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
68	B.	53+z	86,0	29,1	13,7	12,2	12,3	9,9					
69	M.	57	125,0	38,9	35,2	16,9	15,5	12,7	+5,8				
70	B.	60	135,2	48,3	38,1	16,3	15,8	10,0	6,7				
71	M.	66	190,0	35,3	51,7	49,5	26,8	15,4	8,0	+3,3			
72	B.	70	130,0	37,2	39,8	22,5	12,7	9,6	5,1	3,1			
73	M.	72	155,5	26,4	39,0	30,4	21,0	16,5	9,5	10,4	+2,3		
74	B.	83	185,0	31,3	22,2	6,7	19,1	24,3	33,9	23,0	21,3	+2,3	
75	M.	84	123,0	31,8	24,8	18,9	15,1	7,8	6,6	9,3	6,1	+2,5	
76	M.	86	200,0	59,8	39,2	21,1	13,4	16,9	9,8	17,8	12,2	+9,8	
77	M.	88	135,2	35,0	20,0	19,0	18,4	14,2	6,4	7,6	9,1	+4,8	
78	B.	88	180,0	37,8	31,0	23,2	14,4	18,9	16,3	18,1	12,0	+8,3	
79	B.	92	213,2	37,2	46,6	27,2	20,2	16,4	18,0	22,0	10,4	12,7	+2,5
80	B.	108	202,3	15,8	30,2	20,0	22,2	19,1	22,9	23,2	17,8	11,3	11,1
Accroissements additionnels .				0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	+5,8	+3,3	+2,3	+28,3	+2,5
Sommes générales.				463,9	431,5	283,9	226,9	191,7	149,0	137,8	91,2	52,3	13,6
Diviseurs				13,0	13,0	13,0	13,0	13,0	11,7	9,6	7,2	4,9	1,2
Épaisseurs moyennes				35,78	33,19	21,84	17,45	14,75	12,74	14,35	12,67	10,67	11,3:
Épaisseurs calculées				34,69	28,43	23,73	20,10	17,25	14,96	13,11	11,54	10,32	
Différences				—1,08	—4,76	+1,89	+2,65	+2,50	+2,22	—0,20	—1,15	—0,35	

TABLEAU V.

RAYONS MOYENS EN MILLIMÈTRES, SUIVANT LES AGES.

KAAFIORD. Latitude 69° 57'.	Âge de l'arbre.	50	100	150	200	250	300	350							
	Rayon moyen déduit du tableau I, n° 2	50,2	92,4	124,4	146,4	157,4	176,1	194,4							
	Rayon moyen.	50,2	92,4	127,1	151,8	173,8	193,7	208,4							
	Rayon par la formule.	52,0	92,6	125,2	151,9	174,3	193,2	208,5							
	Différence.	+1,8	+0,2	—1,9	+0,1	+0,5	—0,5	+0,1							
PELLO. Latitude 66° 48'.	Âge de l'arbre.	25	50	75	100	125	150	175	200						
	Rayon moyen déduit du tableau II, n° 2	36,6	71,6	94,8	113,6	127,7	140,0	150,2	168,6						
	Rayon moyen.	36,6	71,6	94,8	113,3	129,3	146,0	158,8	172,1						
	Rayon par la formule.	38,4	68,9	93,7	114,2	131,5	146,3	159,1	170,2						
	Différence.	+1,8	—2,7	—1,1	+0,9	+2,2	+0,3	+0,2	—1,9						
GEFFLE. Latitude 60° 40'.	Âge de l'arbre.	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350
	Rayon moyen déduit du tableau III, n° 2	54,5	99,1	139,7	169,5	199,0	217,2	228,5	220,2	228,6	244,2				
	Rayon moyen.	54,5	99,1	139,7	172,8	201,0	225,2	246,5	264,6	281,0	296,8	310,7	323,6	334,9	347,8
	Rayon par la formule.	55,2	100,7	139,1	171,7	199,8	224,4	245,9	265,0	282,0	297,3	311,1	323,6	335,0	345,5
	Différence.	+0,7	+1,6	—0,6	—1,1	—1,2	—0,8	—0,6	+0,4	+1,0	+0,5	+0,4	+0,0	+0,1	—2,3
HALLE. Latitude 51° 30'.	Âge de l'arbre.	10	20	30	40	50	60	70	80						
	Rayon moyen déduit du tableau IV, n° 2.	35,8	69,0	90,8	108,3	123,0	140,4	150,8	166,1						
	Rayon moyen.	35,8	69,0	90,8	108,3	123,0	135,8	150,1	162,8						
	Rayon par la formule.	34,7	63,1	86,8	106,9	124,2	139,2	152,3	163,8						
	Différence.	—1,1	—5,9	—4,0	—1,4	+0,8	+3,4	+2,2	+1,0						

TABLEAU VI.

ÉPAISSEUR MOYENNE DES COUCHES EN MILLIMÈTRES, SUIVANT LES AGES.

LIEUX.	NUMÉRO D'ORDRE DE LA COUCHE.												
	1re couche.	26me.	51me.	76me.	101me.	126me.	151me.	176me.	201me.	226me.	251me.	276me.	301me.
Kaafiord.	1,18	1,05	0,91	0,82	0,72	0,65	0,59	0,53	0,49	0,45	0,41	0,38	0,35
Pello . .	1,75	1,36	1,09	0.90	0,75	0,64	0,55	0,47	0,42				
Gefle . .	2,44	1,99	1,66	1,41	1,21	1,05	0,92	0,81	0,72	0,64	0,58	0,53	0,48
Halle . .	3,85	2,37	1,60	1,16									

TABLEAU VII.

SURFACE ANNULAIRE DES COUCHES SUR UNE SECTION HORIZONTALE, ET SUIVANT LES AGES.

LIEUX.	NUMÉRO D'ORDRE DE LA COUCHE.												
	1re couche	26me.	51me.	76me.	101me.	126me.	151me.	176me.	201me.	226me.	251me.	276me.	301me.
	mm. car.												
Kaafiord.	9	180	298	374	421	448	462	467	465	458	449	438	425
Pello . .	19	328	475	529	539	527	504	476	445				
Gefle . .	37	692	1034	1232	1304	1316	1295	1251	1200	1142	1084	1026	971
Halle . .	91	1125	1250	1154									

TABLEAU VIII.

PINS MESURÉS A HAGUENAU.

Lat. 48° 43′ N. Long. 5° 27′ E.

ÂGE DES ARBRES.	ÉPAISSEUR DES COUCHES EN MILLIMÈTRES.																
	0-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100	101-110	111-120	121-130	131-140	141-150	151-160	161-170
55 ans	48	39	83	65	44	+8											
96 —	8	15	14	19	19	44	36	34	23	+ 9							
99 —	10	11	40	39	30	35	58	32	54	+16							
99 —	17	23	27	36	44	37	57	44	45	+21							
100 —	39	61	93	17	23	23	27	17	15	18							
100 —	21	23	14	14	27	35	69	55	24	10							
108 —	12	17	35	57	50	36	36	45	31	12	+ 5						
109 —	16	23	21	31	45	68	30	34	25	20	+11						
110 —	14	22	23	34	47	57	42	35	28	23	20						
112 —	13	25	25	38	51	45	33	39	27	22	23	+ 4					
115 —	28	33	23	25	25	19	49	34	48	45	25	+ 9					
115 —	20	28	26	42	62	25	63	23	22	14	8	+ 4					
117 —	20	20	18	17	32	37	34	31	37	34	24	+10					
117 —	14	41	46	34	51	30	31	44	28	27	21	+ 9					
117 —	9	28	19	16	18	21	40	45	33	34	16	+ 5					
118 —	15	33	46	42	34	31	51	30	25	26	19	+18					
119 —	25	64	41	25	25	12	20	16	20	16	19	+ 7					
120 —	24	27	29	42	33	28	56	46	39	28	17	8					
120 —	26	30	50	64	37	25	15	12	7	7	11	6					
121 —	25	27	32	45	44	35	26	38	27	29	18	17	+ 2				
122 —	25	28	40	35	35	41	32	33	28	25	23	25	+ 5				
122 —	29	37	37	48	52	45	34	39	29	29	22	18	+ 8				
123 —	28	42	29	57	35	30	23	56	45	28	36	17	+ 3				
123 —	15	17	21	19	19	18	22	35	44	47	28	14	+ 4				
127 —	20	60	49	35	34	35	37	37	19	18	19	16	+11				
127 —	15	30	59	57	26	24	28	43	54	33	25	12	+ 5				
128 —	9	20	30	39	25	30	45	36	36	22	23	13	+ 6				
130 —	32	54	64	53	70	36	35	20	34	15	21	21	6				
138 —	22	35	52	71	39	31	43	27	30	47	21	17	13	+ 6			
176 —	30	37	24	16	20	20	11	23	33	34	15	16	48	28	20	5	+ 4
Accroissements additionnels	»	»	»	»	»	8	»	»	»	45	16	63	44				
Sommes générales	625	988	1110	1132	1074	961	1043	1003	910	710	470	265	113				
Diviseurs	30	30	30	30	30	29.5	29.0	29.0	29.0	28.4	23.7	18.0	6.3				
Épais. moyennes observées	20.8	32,9	37,0	37,7	35,8	32,6	36.0	34,6	31,4	25.0	19,8	14.7	17,9				
Épais. moyennes calculées	25.2	29.0	32.8	36.0	37.6	37.6	36.0	32,8	29.0	25,2	21,6	18,4	15,8				
Différences	−4,4	+3,9	+4,2	+1,7	−1,8	−5,0	0,0	+1,8	+2,4	−0,2	−1,8	−3,7	+2,1				

EXPLICATION

DES

TABLEAUX ET DE LA PLANCHE.

Tableaux I, II, III et IV. Les 5e, 6e et 7e.... colonnes de chacun de ces tableaux offrent les résultats des mesures individuelles exprimées en millimètres de chaque tronc de Pin sylvestre. Les nombres précédés du signe + indiquent la longueur des bouts de rayons qui se sont trouvés excédants quand on a mesuré, du centre à la circonférence, les couches annuelles de 50 ans en 50 ans dans le tableau I; de 25 en 25 dans les tableaux II et III; de 10 en 10 dans les tableaux IV et VIII. — Voir la note *A* pour l'explication des rangées horizontales intitulées *accroissements additionnels*, *sommes générales et diviseurs*. La rangée intitulée *différences* donne les excès de l'épaisseur calculée par les formules (2), (3), (4), (5) du mémoire, sur l'épaisseur moyenne déduite de l'observation.

Tableau V. C'est un resumé des tableaux précédents. Pour les rangées intitulées *rayon déduit* des tableaux n° 2, que nous ne donnons pas pour éviter un double emploi, voir la note *B*. La rangée intitulée *différence* donne l'excès du rayon calculé par les formules (2), (3), (4), (5) du mémoire sur le rayon moyen déduit de l'observation.

Tableau VI. Les nombres indiquent des longueurs en millimètres calculées par la formule (6).

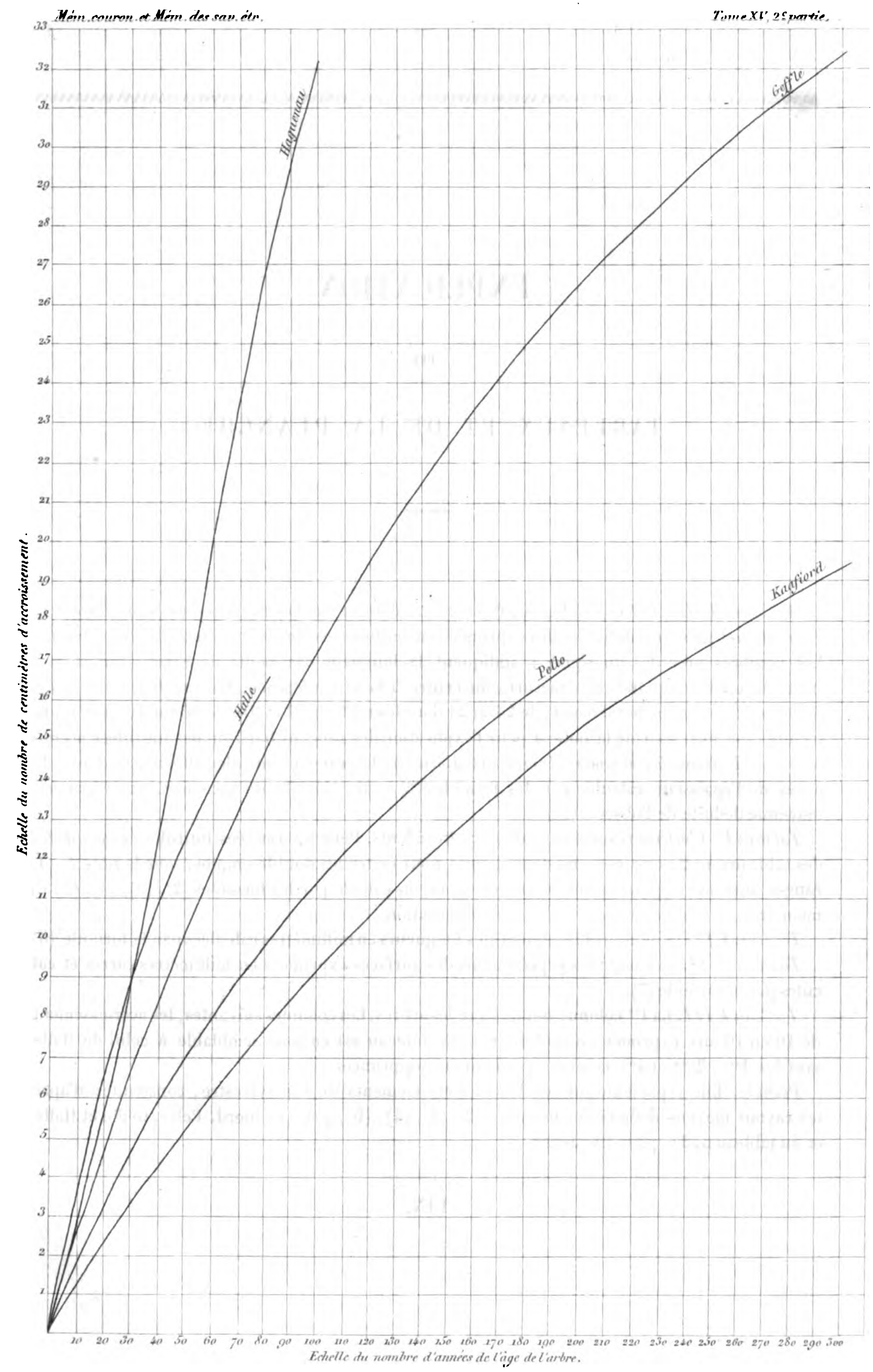
Tableau VII. Les nombres représentent des surfaces exprimées en millimètres carrés et calculés par la formule (7).

Tableau VIII. La 1re colonne donne l'âge des arbres. Les colonnes suivantes, les accroissements de 10 en 10 ans exprimés en millimètres. Ce tableau est en tout semblable à celui de Halle, sauf les 1res, 2mes et 4mes colonnes, qui ont été supprimées.

Planche. Elle représente les courbes d'accroissements du Pin sylvestre, construites d'après les rayons moyens déduits des formules (2), (3), (4), (5), pour Kaafiord, Pello, Geffle et Halle, et du tableau p. 34, pour Haguenau.

FIN.





Courbes d'accroissement en diamètre du Pin sylvestre.

NOUVEL EXAMEN

D'UN

PHÉNOMÈNE PSYCHOLOGIQUE

DU SOMNAMBULISME;

PAR

M. E. TANDEL,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

(Mémoire lu à l'académie, dans la séance de 15 décembre 1839.)

NOUVEL EXAMEN

D'UN

PHÉNOMÈNE PSYCHOLOGIQUE

DU SOMNAMBULISME.

PREMIÈRE PARTIE.

« Il n'y a rien de si instructif pour l'homme éveillé, » a dit Maine de Biran [1], « que l'histoire des songes, ni rien de plus utile pour » l'homme raisonnable que l'histoire de la folie. » Cette maxime, que les Spartiates déjà avaient sans doute comprise, en donnant à leurs fils le spectacle de l'ivresse officielle des ilotes, ne semble pas très-goûtée de nos jours, quoique, dans l'étude des faits matériels, l'anatomie et la physiologie comparées ne soient pas au fond autre chose. Je me souviens avec quelle surprise ironique le monde des savants spéciaux accueillit l'annonce et l'analyse du mémoire que je viens de citer, lorsque l'*Institut* en parla, il y a quelques années. Outre l'en-

[1] *Nouvelles considérations sur le sommeil, les songes et le somnambulisme*, mémoire lu à l'académie des sciences morales et politiques, par M. Cousin, le 31 mai 1834.

gouement de notre époque pour l'observation des faits, il y a, je l'avoue, des raisons, spécieuses au premier coup d'œil, pour qu'on ne s'égare pas dans le dédale des phénomènes psychologiques, où chacun, dit-on, ne voit que soi-même, où il ne se voit bien souvent qu'à travers ses passions et ses préjugés du moment, où les observations fugitives qui peuvent se présenter échappent presque entièrement au contrôle d'autrui et ne se reproduisent pas à volonté; enfin, où les faits, en les supposant parfaitement constatés, nous conduiraient à quoi? à raisonner plus juste? à nous dépouiller de notre égoïsme? vain espoir! L'avare de Molière a-t-il opéré la conversion d'un seul des harpagons qu'il nous a dépeints avec tant de vérité et qui sont venus l'applaudir? ou bien l'anatomiste, qui a analysé toutes les fibres du corps humain, en marche-t-il plus droit et plus ferme? On ajoute qu'on ne peut concevoir qu'un seul côté intéressant dans les observations de ce genre, intérêt purement scientifique, qui découlerait de l'explication des faits; mais cette tentative on la déclare encore plus insensée que l'observation elle-même. Que sera-ce, si les faits dont il s'agit appartiennent à une région aussi ténébreuse que celle des songes et du somnambulisme, où le *moi* lui-même, assure-t-on, est anéanti? N'est-il pas d'un homme sage de fermer les yeux à ce tissu d'illusions, spectacle bien venu d'un vulgaire ignorant, et de s'en tenir aux seules réalités pondérables?

Je ne me dissimule aucune de ces difficultés. L'esprit dans lequel on cultive généralement aujourd'hui toutes les sciences n'est rien moins que favorable aux recherches que j'annonce, et les savants, qui de tout temps se sont partagés en deux catégories, les uns s'appliquant à constater les faits et à les décrire, les autres à les comprendre et à les expliquer, ne se sont jamais aussi hostilement éloignés les uns des autres que de nos jours. La passion, j'ai presque dit la fureur de l'observation exclusive et isolée va si loin, que vous entendez des savants du premier ordre protester de la manière la plus formelle et la plus énergique contre les prétentions de ceux qui s'efforcent de leur faire comprendre ce qu'ils voient. Pour eux, décidés à ne rien com-

prendre ni rien expliquer, ils se bornent à recueillir et à analyser les faits que peuvent atteindre leurs doigts ou leurs rayons visuels, la seule chose sensée que l'homme puisse faire, jusqu'au moment où tous les faits étant réduits en atomes, et se refusant à toute analyse ultérieure, l'édifice de la vraie science soit complétement élevé. Alors se vérifiera pleinement ce mot du *Méphistophélès* de Goethe :

Wer will was Lebendig's erkennen und beschreiben
Sucht erst den Geist herauszutreiben;
Dann hat er die Theile in der Hand,
Fehlt, leider! nur das geistige Band [1].

Au surplus, ce travail d'analyse fait des progrès très-rapides; car aujourd'hui déjà se fait sentir, dans toutes les sciences d'observation, le besoin d'une catégorie nouvelle de savants, chargés d'observer les observations, de les inventorier, de les classer et de les porter à la connaissance du praticien, afin de leur donner au moins, s'il est possible, cette utilité réelle, à laquelle on ne croit pouvoir faire de trop grands sacrifices.

Quelque puissantes que soient ces considérations, elles n'ont pu détruire en moi, je dois le confesser, la prédilection que j'ai toujours sentie pour les questions de l'ordre intellectuel, pour le côté immatériel des choses; je persiste à croire qu'il y a du vrai dans la maxime de Biran, et qu'après tout, quiconque a éprouvé combien il y a de déceptions dans la vie que l'on nomme réelle, ne s'expose tout au plus, en se réfugiant dans son intérieur, qu'à changer d'illusion. Je me souviens d'ailleurs aussi, que dans mes années de collége on m'a parlé de l'enthousiasme avec lequel les Romains, ce peuple si égoïste néanmoins, applaudirent à cette pensée de Térence : *Homo sum, humani nihil a me alienum puto*. J'entre donc en matière.

[1] Ce qui veut dire, par une comparaison plus directe, que le chimiste, par exemple, pour savoir ce que c'est qu'un être vivant, le décomposera et résoudra la fibrine, l'albumine, etc., en hydrogène, oxygène, carbone et azote, mais que malheureusement il a laissé échapper le lien immatériel qui faisait de ces éléments un être vivant.

Les phénomènes du somnambulisme spontané sont généralement connus; il est peu de personnes qui n'aient eu occasion de les observer par elles-mêmes, et quelque inexplicables qu'ils soient parfois, ils sont entourés de toute l'authenticité dont les sciences d'observation ont pu revêtir les faits naturels, à quelque domaine qu'ils appartiennent [1]. Je ne puis me proposer, dans les limites étroites de cette notice, d'approfondir les causes et la nature de cet état extraordinaire; mais je crois pouvoir rendre compte d'un phénomène psychologique qui l'accompagne, et qui forme un de ses caractères les plus étranges, puisqu'il semble constituer dans les somnambules une double personnalité. Tous ceux qui ont pu observer des somnambules parfaits, se sont convaincus que l'oubli le plus profond enveloppe pour eux, une fois qu'ils sont rendus à l'état de veille ordinaire, tous les faits dont ils ont été les acteurs pendant leur sommeil; les témoignages sont unanimes à cet égard. S'ils se souviennent de quelque chose, ce qui est excessivement rare, c'est comme d'un rêve [2]. Comme les rêves et le somnambulisme diffèrent entre eux du tout au tout, un tel souvenir n'en est pas un. Nous nous souvenons d'un rêve comme d'une illusion, tandis que les phénomènes du somnambulisme ont toute la réalité de ceux de la veille. Broussais, en argumentant contre Biran, et en protestant avec raison contre l'hypothèse des deux *moi*, a donc tort de citer ces souvenirs comme une *exception* au fait général du complet oubli.

Comment expliquer cet oubli? comment le concilier avec les lois fondamentales de la psychologie? Bien qu'on dise qu'il n'y a pas de règle sans exception; quand on ne peut rendre compte d'un fait bien constaté qu'en admettant une exception contradictoire à cette règle, celle-ci se trouve détruite. Toute exception apparente doit s'expliquer par la loi elle-même à laquelle elle semble déroger. Telle est la ques-

[1] « Tel est, » dit Broussais, « le tableau que Biran (dans le mémoire cité plus haut) trace » du somnambulisme : *il est exact*, et nul ne l'a mieux tracé. » *Mémoire sur l'association du physique et du moral*, lu à l'académie des sciences morales et politiques, les 16 et 23 août 1834, § VII.

[2] Broussais, *loco cit.*, p. 183.

tion que je me suis proposé d'examiner. Je développerai mes propres idées sur cette matière en exposant celles des autres.

Le somnambulisme serait compris, si tous les phénomènes qu'il nous présente pouvaient se rapporter à des faits connus de l'état de veille ; car nous croyons comprendre les choses que nous voyons tous les jours. « Nous sommes tous plus ou moins, » dit encore Biran, « comme le peuple ignorant, qui ne s'étonne point en voyant tom- » ber une pierre, et qui crie au miracle en voyant pour la première » fois le fer tendre vers l'aimant. » C'est dans le sens de cette observation que ce philosophe, plaçant sur la même ligne les songes et les phénomènes du somnambulisme, tâcha d'expliquer les uns et les autres par le seul fait de « l'absence de l'attention volontaire et active, dans » leur première production (p. 34). » Et ce qui confirme à ses yeux cette doctrine, c'est surtout cet oubli profond qui fait que le même être « semble divisé en deux personnes distinctes, dont l'une ne s'ap- » proprie rien de ce que l'autre a fait ou senti, n'en conserve pas le » moindre souvenir, n'y joint pas le même *moi* (p. 59). » Cet oubli, selon lui, est un caractère *essentiel* des songes et partant du somnambulisme. « Il ne faut donc plus, » ajoute-t-il, « demander pour- » quoi nous ne conservons pas le souvenir de tous nos rêves, mais » bien comment il arrive que nous nous en rappelions quelques-uns » (p. 35). » Et plus loin : « Dans un sommeil complet il n'y a nul » souvenir, et là où il y a souvenir, le sommeil n'était pas parfait » (p. 36). »

Ainsi le somnambule oublie, parce qu'en agissant, en pensant, en parlant, il n'a pas conscience de lui-même, parce que son *moi* est aboli; en d'autres termes, parce que l'âme du somnambule et du dormeur n'est plus capable d'aucun *effort* : « La conscience du *moi* » se réfère à l'état d'effort qui fait la veille, et cet effort est périodique » et suspendu pendant le sommeil (p. 35). » Au surplus, la suspension de cet effort est due à des causes organiques. Et c'est parce que cet oubli, inséparable du sommeil parfait et du somnambulisme, ne peut s'expliquer autrement aux yeux de l'auteur que par cette ab-

sence d'effort ou cette abolition de la volonté, qu'il sert à la prouver. Car « l'*effort volontaire* que fait l'esprit pour *rappeler une idée*, est » un acte de veille complète, absolument étranger au sommeil. Aussi » si, comme il arrive quelquefois mais assez rarement, on s'occupe » en rêvant des signes de quelque idée, et que ceux-ci demandent » quelque effort pour être rappelés, *aussitôt que l'effort se déploie et* » *que le signe se présente*, le réveil s'en suit à l'instant; tant l'état » de sommeil est incompatible avec le plus léger exercice de la vo- » lonté, tant il suppose son absence complète! (p. 37) » Le souvenir est donc bien inconciliable, dans l'esprit de Biran, avec l'état de sommeil (et de somnambulisme), et cela parce que le souvenir exige l'intervention d'un effort volontaire de l'intelligence, et que pendant le sommeil (et le somnambulisme) cet effort est suspendu.

Je n'examine ici le travail de Biran que sous un seul rapport, et s'il ne me satisfait pas sur ce point, cela ne m'empêche pas de reconnaître tout ce qu'il renferme de vues neuves et vraies, sous d'autres points de vue.

L'erreur fondamentale que je dois relever dans ce mémoire, le travail le plus récent, je pense, qui ait paru en France sur cette matière, c'est que l'auteur a confondu le sommeil et les songes avec le somnambulisme et ses phénomènes. La théorie que je viens de résumer explique peut-être parfaitement ce qu'il y a d'étrange et d'anomal dans les rêves; mais elle est cause que Biran ne nous a présenté, sous ce rapport psychologique, qu'un tableau très-incomplet du somnambulisme.

Il est très-vrai que le somnambule spontané, rendu à l'état de veille, ne conserve pas le moindre souvenir de ce qu'il a fait ou éprouvé dans un état tout différent, et qui a peut-être duré trois ou quatre heures; mais ce qui n'est pas moins vrai, c'est que le somnambule se souvient parfaitement de toute son existence antérieure, tant de l'état de veille que des accès précédents de somnambulisme, et même infiniment mieux que quand il est éveillé; ses actions et ses discours prouvent également, qu'il sent clairement son identité, avec

l'individu de l'état de veille, puisqu'il ne fait que reprendre et continuer, d'une manière fort rationnelle, le fil des idées ou la suite des travaux qui l'avaient occupé pendant sa veille diurne. Cette singularité d'une mémoire qui ne s'exerce que d'un côté, savoir dans le somnambulisme sur l'état de veille, et non dans ce dernier sur le somnambulisme, et dont il est impossible de ne pas être frappé, quand on a observé des somnambules, cette singularité avait déjà été signalée par l'*Encyclopédie* [1], et il y a lieu de s'étonner que Biran, qui cite l'*Encyclopédie*, mais sans relever cette circonstance remarquable, n'ait pas senti la difficulté qui en résultait pour sa théorie. Car si la suspension de l'acte personnel et volontaire, si l'abolition du *moi* de l'état de veille explique à elle seule les phénomènes du somnambulisme, et si elle se prouve surtout par l'absence totale du souvenir, qui fait, dit-on, du somnambule et de l'éveillé deux êtres complétement étrangers l'un à l'autre; alors rien n'est prouvé ni rien expliqué, du moins quant au somnambulisme, puisque le somnambule sait fort bien qu'il ne fait qu'un avec la personne de l'état de veille.

Mais il y a plus que cela : des observations nombreuses prouvent aujourd'hui que les faits du somnambulisme peuvent très-bien se transmettre par le souvenir à l'état de veille, et cela sans déroger, comme nous le verrons plus loin, aux lois ordinaires de l'association des idées. On a fait de nombreuses expériences pour vérifier si les somnambules avaient réellement la conscience des objets qui les entouraient, et s'ils les apercevaient par les appareils ordinaires des sens [2]; mais on n'a pas songé à s'assurer, à l'égard des somnambules

[1] Par l'Encyclop. ancienne de d'Alembert et Diderot, publiée en 1765, art. *Somnambulisme*.

[2] Voyez entre autres les *Mémoires de l'académie royale des sciences*, année 1742, p. 409 et suiv.; les observations faites par les docteurs Pigatti et Reghellini, et consignées dans le *Journal encyclopédique*, juillet 1762, et dans le *Dictionnaire des merveilles de la nature*; l'*Encyclopédie*, citée plus haut; les *Mémoires de la société des sciences physiques de Lausanne*, III, 81 et 98 (année 1787); Moritz, *Magazin für Erfahrungs-seelenkunde*, II, 2ᵉ partie, p. 85 et suiv.; Schubert, *Symbolik des Traums*, p. 151, 3ᵉ édit.; Nasse, *Zeitschrift für Anthropologie*, 1824, I, 339 et 1826, I, 305.

spontanés, si, les conditions naturelles du souvenir étant données, le sommeil pouvait se lier à la veille, comme celle-ci se lie évidemment au sommeil; cette lacune a été remplie par des expériences faites dans des cas de somnambulisme artificiel [1]. Outre les faits consignés dans divers ouvrages [2], j'ai eu occasion d'observer moi-même d'une manière suivie, il y a dix ans, une somnambule, qui se souvenait de ce qu'il lui plaisait, en employant les moyens qui nous sont familiers dans l'état de veille, en faisant un nœud dans son mouchoir ou dans ses cheveux, en défaisant un bouton de la manche de sa robe, etc. Ces *memento*, qu'elle faisait à l'insçu même de son magnétiseur [3], lui avaient cependant été suggérés par lui. Voulant répéter une expérience déjà faite antérieurement sur d'autres personnes, il lui avait demandé quelquefois si elle ne désirait pas conserver le souvenir de tel ou tel détail, qu'il n'y avait pas nécessité de lui laisser ignorer, et sur sa réponse affirmative, il lui ordonnait de penser, par exemple, au nombre *sept*. Après le réveil et au milieu d'une conversation générale, tout étrangère à ce qui s'était passé pendant le sommeil magnétique, il prononçait à haute voix ce nombre *sept*, en s'adressant à la somnambule, et celle-ci, comme une personne transportée avec la rapidité de la pensée dans une autre partie du monde, demeurait immobile de surprise et de confusion, en rentrant, avec pleine conscience de soi, dans une des scènes de sa vie somnambuli-

[1] « L'oubli au réveil de tout ce qui s'est passé dans l'état de somnambulisme (artificiel) est » une des propriétés les plus constantes de cet état singulier. Au surplus, la perte totale du » souvenir s'observant assez fréquemment à la suite du délire, de la folie et de plusieurs au- » tres affections, cette faculté (?) n'a jamais excité l'incrédulité. » (Bertrand, *Considérations sur l'extase*, p. 409.) — Les personnes qui, sans avoir jamais observé de somnambule magnétique, croient cependant pouvoir nier les faits que d'autres ont constatés, peuvent considérer comme non avenus les arguments que je tire de ces faits; ma démonstration peut s'en passer, ils ne servent qu'à corroborer. Je rappellerai que M. Cousin a pu, au sein de l'académie royale des sciences morales et politiques, parler du somnambulisme artificiel comme d'une chose avérée et connue de tout le monde.

[2] Kieser, *System des Tellurismus*, § 271; Van Ghert, dans *Kieser's archiv für den thierischen Magnetismus*, III, 3, p. 35; Billot, *Correspondance sur le magnétisme vital*, II, 204 et suivantes.

[3] M. Van Ghert, référendaire au conseil d'état, à La Haye.

que. Ces signes extérieurs n'auraient servi de rien, s'il ne s'y était joint l'intention d'associer les idées présentes à l'esprit dans l'état de somnambulisme avec certaines idées qui devaient nécessairement le frapper après le réveil. Aussi a-t-on remarqué que la volonté seule du somnambule, sans aucun artifice de mnémotechnie, pouvait déterminer le souvenir, soit que cette volonté fût spontanée, soit qu'elle eût elle-même pour cause l'influence du magnétiseur [1].

Ce n'est pas tout encore. L'abolition de la volonté dans la production des phénomènes du somnambulisme est si peu la cause de l'oubli qui les enveloppe ordinairement, qu'un oubli tout aussi profond peut effacer de notre mémoire des idées qui ne sont dues cependant qu'à un développement extraordinaire de notre liberté morale. Ce n'est pas sans un acte de grande énergie volontaire, que, dans nos études, nous parvenons quelquefois à concentrer notre attention sur un seul objet, après avoir péniblement fermé, pour ainsi dire, nos sens à des sollicitations de tout genre et souvent bien puissantes, qui venaient du dehors les assaillir. Nos facultés intellectuelles semblent alors exaltées, la pensée se déroule avec une facilité qui nous étonne, nous *voyons* plutôt que nous ne réfléchissons. En même temps les impressions extérieures, qui nous auraient frappés dans toute autre circonstance, demeurent inaperçues [2]. Mais qu'une de ces impressions soit assez forte pour attirer brusquement notre attention sur l'objet qui l'a produite, et nous maudirons cette distration importune, parce que nous ferons désormais de vains efforts pour retrouver les idées que nous voyions si claires et si vraies il n'y a qu'un instant, et qui nous offraient des solutions cherchées depuis longtemps. L'analogie évidente qui existe entre cet état d'une veille bien consciente d'elle-même et

[1] Kieser, *System*, *etc.*, § 271; Bertrand, *Traité du somnabulisme*, ouvrage que je n'ai pu me procurer, mais dont j'ai lu une analyse très-détaillée dans *Nasse's Zeitschrift für Anthropologie*, 1824, I, 115 à 155; Passavant, *Untersuchungen über den Lebensmagnetismus*, p. 95, 2e édit.

[2] On rapporte, par exemple, qu'un ami de Kant entra un jour dans sa chambre, y resta assez longtemps pour fumer une pipe de tabac, et s'en retourna sans que Kant s'en aperçût. Il méditait sur la nature de l'espace et du temps.

le somnambulisme a été remarquée par MM. Passavant [1] et Ahrens [2], mais elle ne les a pas conduits à la conclusion que j'en tirerai plus tard, pour l'explication du phénomène qui nous occupe. Cette analogie, on peut même la poursuivre plus loin; car il nous arrive parfois de retrouver d'une manière inattendue les idées dont nous avions regretté la subite disparition, lorsque nous sommes parvenus à reproduire un état de méditation profonde, semblable à celui qui les a vues naître. C'est ainsi que les somnambules se souviennent fort bien de ce qu'ils ont dit ou fait pendant leurs sommeils précédents, et que ces divers accès, s'unissant entre eux, semblent constituer pour eux une existence à part, distincte de l'état de veille.

Il résulte clairement de ces faits et de ces considérations, que l'explication des phénomènes du somnambulisme, et notamment de l'oubli au réveil, présentée par Biran, est insuffisante.

L'abbé Frère, indigné de voir la plupart des écrivains qui se sont occupés de magnétisme vital, séduits par une analogie superficiellement appréciée, confondre les extases des saints et les prophéties des hommes inspirés de Dieu avec les phénomènes du somnambulisme magnétique, a publié récemment une brochure [3], où il s'attache à faire ressortir la différence essentielle qui distingue ces deux états, attribuant les faits magnétiques, que sa bonne foi ne lui permet pas de nier, ce qui eût été plus commode, à l'intervention des anges des ténèbres, et appuyant cette opinion sur la double personnalité, que l'oubli dont il est question ici semble attester dans les somnambules. Cette hypothèse se trouve donc aussi réfutée.

Les physiologistes français, fidèles à la loi que les savants de cette nation semblent s'être faite généralement de ne pas chercher à comprendre les faits, mais seulement à les constater, ne nous ont guère présenté de théorie sur la cause du même phénomène, bien qu'ils aient eu fréquemment occasion de l'observer, ailleurs encore que dans

[1] *Untersuchungen über den Lebensmagnetismus und das Hellsehen*, p. 150, 1re édition.
[2] *Cours de psychologie*, I, 325.
[3] *Examen du magnétisme animal*. Paris, 1837.

le somnambulisme. Broussais semble l'attribuer à une érection nerveuse du cerveau [1]. Le docteur Bertrand, dans son *Traité du Somnambulisme*, ouvrage d'ailleurs très-remarquable, l'explique par une surexcitation du cerveau, attendu que cette surexcitation est constatée dans le délire, et que celui-ci est également suivi d'un oubli complet. Je veux bien qu'une semblable surexcitation soit la condition extérieure et matérielle de la production du somnambulisme et même du sommeil ordinaire, comme l'œil est la condition extérieure de la vision, mais cela ne m'apprend rien sur l'enchaînement des phénomènes psychologiques; et puis nous avons vu que cette surexcitation n'empêchait pas le souvenir de survivre néanmoins au réveil, ni d'embrasser chez le somnambule toute l'étendue et tous les détails de l'état de veille.

Les savants allemands qui ont traité cette matière prennent les choses de beaucoup plus haut. Kieser, par exemple [2], se plaçant au point de vue des lois générales de l'existence et les appliquant successivement au système solaire et à tous les phénomènes sublunaires, tant de l'ordre intellectuel et moral que de l'ordre physique, est conduit à attribuer le somnambulisme, sous le rapport psychologique, à la prépondérance que la faculté de sentir a acquise sur celle de connaître. Ce n'est pas ici le lieu d'examiner dans son ensemble cette théorie extrêmement vaste; je me bornerai à l'apprécier dans son rapport avec la question qui nous occupe.

Le développement de l'âme est, selon Kieser, le résultat de l'action réciproque et alternativement prépondérante de ses deux pôles opposés, du pôle intelligent ou pensant (positif) et du pôle sensitif (négatif). Le premier est au second ce que le soleil est aux planètes, ce que la terre est à la lune, ce que la lumière est à la chaleur, ce que le jour est à la nuit, ce que la veille est au sommeil, ce que la vie animale est à la vie végétative, etc., etc. Cette analogie se reproduit partout, dans l'homme comme dans la nature, dans les différentes faces que

[1] *Mémoire sur l'association*, etc., p. 184.

[2] *System des Tellurismus*, 1822, et *System der medicin*, 1817 et 1819.

présente le même individu comme dans l'histoire de l'humanité. Or pourquoi l'état de veille ou la prépondérance du pôle positif et le somnambulisme ou la prépondérance du pôle négatif sont-ils séparés comme par un abîme dans la vie de l'homme, faute d'un souvenir qui les unisse? C'est que l'âme, qui ne saurait se manifester sans organe matériel, ne dispose pas dans ces deux états des mêmes organes. Les deux pôles du système nerveux qui correspondent à ceux de l'âme, sont le système ganglionnaire et l'axe cérébro-spinal, et dans l'encéphale même ce sont les organes ou circonvolutions inférieures, attachées aux facultés affectives et sensitives, et les organes supérieurs, agents des facultés intellectuelles. L'action prépondérante de l'un de ces pôles sur l'autre caractérise respectivement le sommeil et la veille, sous le point de vue physiologique. Pour que cette explication en fût une, il faudrait supposer les facultés de l'âme dans un état absolu d'isolement et d'indépendance réciproques, démenti par tous les faits et repoussé par les principes fondamentaux de Kieser lui-même. Aussi ce dernier se hâte-t-il d'ajouter, que néanmoins le somnambule se souvient fort bien de son propre état de veille, ce qu'il explique par la supériorité du pôle positif sur le pôle négatif. On peut s'étonner à bon droit, que ce soit en vertu d'une supériorité que l'état de veille est privé d'une faculté que possède le somnambulisme, qui est censé lui être inférieur. Expliquons donc la pensée de l'auteur.

L'âme intelligente, qui a conscience d'elle-même et qui est moralement libre, étant supérieure à cet autre état de l'âme, où celle-ci est toute sensitive, à l'âme dont la pensée est automatique, il faut que l'état de veille exerce une plus grande influence sur le somnambulisme que celui-ci n'en peut exercer sur le premier; ce qui fait que les idées de la veille *dominent* celles du somnambulisme et peuvent s'unir à elles, tandis que la réciproque est impossible. Que signifie ce mot *dominer?* car jusqu'ici, c'est l'auteur que j'ai laissé parler.

On sait que nos souvenirs sont tantôt involontaires, tantôt volontaires. Dans le premier cas, on peut, quand on n'y regarde pas de bien près, considérer les idées dont on se souvient comme douées

d'une certaine spontanéité, en vertu de laquelle elles viennent solliciter notre attention, sans être demandées. Voilà sans doute en quoi consiste la domination dont il s'agit. Quand le souvenir est volontaire, l'esprit cherche une idée qui ne se présente pas d'elle-même et la trouve.

Le somnambule se souvient des idées de l'état de veille, et cela, parce que celles-ci dominent le somnambulisme : on suppose donc le somnambule dans le cas du souvenir involontaire. L'homme éveillé ne se souvient pas des idées qu'il a eues comme somnambule. C'est sans doute parce que ces idées, produites par une pensée automatique, n'ont pas le pouvoir de venir d'elles-mêmes solliciter l'attention de l'âme qui veille, de se reproduire spontanément dans l'âme, qui a repris la direction d'elle-même, qui a reconquis son autonomie. Elles ne peuvent, dit-on, se reproduire que dans un état semblable à celui où elles se sont formées pour la première fois.

Nous verrons tout à l'heure ce qu'il faut penser de cette spontanéité que l'on attribue aux idées de la veille, dans le fait du souvenir, supposé involontaire, du somnambule à leur égard. Rattachons pour le moment tout cela à quelque chose de généralement connu.

Lorsque dans l'état de veille nous nous laissons aller à nos rêveries, quand nous faisons des châteaux en Espagne, les lois d'après lesquelles nos idées se développent sont absolument les mêmes que si nous avions pleine conscience de notre *moi;* il n'y a que cette différence, qu'au lieu de diriger nous-mêmes le mouvement de nos idées, nous les laissons s'associer au gré des premières impressions qui leur ont fourni l'occasion de se produire ou de se reproduire, ou bien au gré des sensations et des désirs qu'elles éveillent à leur tour dans notre âme. Cet état de l'âme est agréable, parce que nous jouissons de son activité sans qu'il nous en coûte le moindre effort. C'est la pensée automatique, ce sont les souvenirs involontaires, c'est la vie sensitive du somnambulisme. Cependant revenus à nous-mêmes, nous pouvons nous souvenir de tous les détails de ces rêveries. Quant elles sont arrivées à un certain développement, à un certain résultat, l'esprit s'y repose agréa-

blement; puis revenant à lui-même, il reconnaît l'illusion qui l'abuse, et parfois se demandant par quel enchaînement d'idées il est arrivé là, il parvient, en remontant des effets à la cause, à reproduire cet enchaînement et à se rendre compte de la cause première qui l'a provoqué. Ne dites pas que ces rêves de la veille ne ressemblent au somnambulisme qu'en apparence : ils n'en diffèrent que par un moindre degré d'isolement de l'âme, à l'égard des choses extérieures qui ne l'occupent pas dans le moment; ce qui est cause qu'elle ne passe guère de la contemplation à l'action externe. Les sens du rêveur sont pour ainsi dire oblitérés; comme le somnambule, il est entièrement absorbé par les idées qui le dominent, et comme le somnambule encore, il en perdra complétement le souvenir, si vous l'arrachez brusquement à ses méditations involontaires. N'est-il jamais arrivé à votre esprit de s'absenter ainsi en présence d'autres personnes causant de choses indifférentes? Si alors on vous a interpellé par votre nom, en vous demandant à quoi vous pensiez, vous aurez peut-être répondu que vous n'en saviez rien. Ce n'était pas réserve ni discrétion de votre part; car réellement vous n'en saviez plus rien. D'où vient cet oubli? nous le verrons plus loin; j'ai voulu constater ici l'analogie parfaite qui existe entre les rêveries de la veille et l'état de somnambulisme [1], ce qui n'empêche pas que les premières ne puissent être complétement reproduites par le souvenir, après qu'elles ont cessé et lorsque l'âme a recommencé à penser et à agir avec connaissance de cause.

N'argumentez pas non plus contre cette analogie, en rappelant que, dans les rêveries en question, l'esprit ne s'occupe que d'illusions. Voici le fait. Celui qui fait des châteaux en Espagne ne croit pas lui-même à la réalité *actuelle* des objets extérieurs qu'il se représente; il se les figure seulement comme possibles, et il anticipe intellectuellement les jouissances que leur réalisation lui procurerait; voilà toute l'illusion, si c'en est une. Mais ce qui n'en est pas une, ce sont les idées elles-mêmes présentes à son esprit, idées produites sponta-

[1] Maine de Biran a parfaitement senti et signalé cette analogie, mais sans la considérer sous le point de vue du souvenir. *Nouvelles considérations*, etc., p. 32 et suivantes.

nément, comme celles du somnambulisme, d'après la théorie de Kieser, et se développant comme elles d'une manière très-cohérente, très-normale; mais qui tantôt se trouvent complétement effacées de la mémoire, tantôt se reproduisent par le souvenir, après le retour de la conscience de soi : d'où je crois pouvoir conclure, que si le somnambule se souvient de l'existence de l'état de veille, ce n'est point parce que l'âme éveillée *domine* l'âme en état de somnambulisme; et que si l'homme éveillé ne se souvient généralement pas de ce qu'il a dit ou fait comme somnambule, ce n'est point non plus parce que la pensée du somnambule est une pensée automatique.

Mais nous avons vu plus haut, que le somnambule magnétique peut se souvenir dans l'état de veille de ce qu'il lui plaît de se rappeler de son existence somnambulique, et les faits de ce genre sont connus de Kieser; il paraît même qu'il en doit la connaissance à la personne qui m'a fourni à moi-même l'occasion de les observer. Il eût été difficile de ne pas songer, pour les expliquer, à l'association des idées; c'est aussi ce qu'il fait. Mais ce qui me semble tout aussi difficile, c'est de concilier cette explication avec la théorie précédemment exposée.

D'après cette théorie, comme nous venons de voir, les idées du somnambulisme n'auraient pas eu par elles-mêmes le pouvoir de se représenter à l'esprit dans l'état de veille. L'auteur, qui ne semble connaître que le souvenir involontaire, doit supposer également que l'homme éveillé n'a pas le pouvoir de les rappeler *volontairement*, quoiqu'il jouisse de ce pouvoir à l'égard des idées nées pendant la veille. C'est pourquoi il admet que, pendant le somnambulisme, l'âme peut avoir des moments de conscience de soi et de liberté morale, et que c'est alors qu'usant de l'empire que, par son pôle positif, elle exerce sur le pôle négatif, elle associe les idées dont elle veut garder le souvenir avec certains signes qui se représenteront après le réveil, ou bien qu'elle prend simplement la résolution de s'en souvenir, ce qui suffit; car ces idées, présentes à la conscience sous le règne du pôle positif, si je puis m'exprimer ainsi, jouiront désormais de l'énergie

ou de la spontanéité nécessaire pour se reproduire d'elles-mêmes dans l'état de veille.

Je crois avoir bien interprété la pensée de Kieser; mais il n'a fait ici que reculer la difficulté. A quelle condition ces éclairs de la vie intelligente, de la vie consciente d'elle-même, viendront-ils illuminer de la sorte la vie somnambulique? L'auteur ne le dit pas. Il est très-probable qu'il les fait naître sous la seule influence du magnétiseur, car il devait ignorer que les somnambules peuvent faire ces *memento* ou prendre ces résolutions à l'insçu du magnétiseur, fait qui a été observé pour la première fois chez la somnambule dont j'ai parlé plus haut, sept à huit ans après la publication de l'ouvrage de Kieser. Quand cette influence n'y est pour rien, est-ce le hasard qui produit cet éveil de l'intelligence libre au milieu des phénomènes du somnambulisme? j'ai peine à le croire, en voyant qu'il se présente au gré du somnambule, chaque fois que celui-ci désire se souvenir de quelque chose, et qu'il peut s'étendre, par conséquent, à toute la durée du somnambulisme. Il est donc plus naturel d'expliquer ce souvenir par la simple association des idées, qui agit ici comme elle agit dans l'état de veille. Kieser, tout en nommant cette association, ne s'est pas rendu compte de sa loi ni de ses conditions. Ce sont elles qui expliquent tout, l'oubli aussi bien que le souvenir, et ce sont encore elles qui sont cause que le somnambule se souvient toujours des idées de l'état de veille, et non l'empire que l'on attribue à l'état de veille sur le somnambulisme. Car les idées dont je me souviens involontairement ne sont pas douées de plus de spontanéité que celles que ma mémoire ressuscite par ses propres efforts : si elles surgissent dans mon esprit sans que je les cherche, c'est qu'elles furent jadis associées à une idée, à un sentiment, à un désir actuellement présent à ma conscience, et par qui elles sont rappelées.

Quelle est l'influence que l'association des idées exerce sur le souvenir? avant de répondre à cette question et de compléter l'exposé de mes idées sur le sujet qui nous occupe, je terminerai l'examen des opinions émises par d'autres sur la même matière.

Le somnambulisme magnétique a été, en Allemagne, l'objet de recherches scientifiques de la part d'un grand nombre de savants du premier ordre, tels que Gmelin [1], Hufeland [2], Nees von Esenbeck [3], Passavant, Eschenmayer [4], Brandis [5], Nasse [6], Strombeck [7], Meyer [8], etc.; mais l'explication qu'ils donnent des modifications remarquables que nous offre le souvenir dans cet état extraordinaire, quand ils s'en occupent, ne diffère pas au fond de celle de Kieser. Elle a été reproduite encore dans un travail plus récent du professeur Fischer sur le somnambulisme [9], travail très-intéressant sous un autre rapport. « Ce singulier phénomène » dit-il « ne s'explique qu'en » admettant, pour la veille somnambulique et la veille diurne, deux » siéges et deux régions toutes différentes (p. 321). »

M. Ahrens pense [10] qu'il serait difficile de « donner une raison psychologique satisfaisante » du même phénomène. Il se sert, pour le faire comprendre, d'une comparaison qui rappelle la théorie de Kieser. « On pourrait se figurer » dit-il « ces trois états principaux » (la veille ordinaire et les deux degrés du somnambulisme) « comme trois » cercles de la vie, contenus l'un dans l'autre, et dont le troisième » étant le plus extensif comprendrait les deux autres sans être compris » par eux-mêmes. La personnalité humaine s'élèverait ainsi comme » par une métamorphose ascendante, dans des sphères plus élevées, » dont chacune présenterait une vue plus large, en embrassant en

[1] *Ueber den thierischen Magnetismus*, 1787 et 1789; *Materialen für die Anthropologie*, 1791 à 1793.

[2] *Ueber Sympathie*, 1811; *Journal der praktischen Heilkunde*, années 1815 et 1818.

[3] *Entwicklungsgeschichte des magnetischen Schlafs u. Traums*, 1820, leçons faites à l'université de Bonn.

[4] *Versuch die scheinbare Magie des thierischen Magnetismus aus physiologischen u. psychologischen Gründen zu erklären*, 1816.

[5] *Ueber psychische Heilmittel u. Magnetismus*. Copenhague, 1818.

[6] *Archiv für den thierischen Magnetismus*, publié avec Eschenmayer, Kieser et Nees von Esenbeck, 1817-21.

[7] *Geschichte eines allein durch die Natur hervorgebrachten animalischen Magnetismus*, 1813.

[8] *Blätter für höhere Wahrheit*, 1818 et 1820.

[9] *Deutsche Vierteljahrs-schrift*, 1838, 1er cahier, p. 293-322.

[10] *Cours de psychologie*, I, 324-25.

» même temps la sphère inférieure par le lien du souvenir. » On voit qu'il explique aussi l'impossibilité du souvenir par la supériorité d'un de ces états sur l'autre; mais à l'inverse de Kieser, il partage l'opinion de ceux qui considèrent le somnambulisme comme supérieur, sous le rapport psychologique, à l'état de veille.

SECONDE PARTIE.

Je reprends maintenant la question posée plus haut : Quelle est l'influence que l'association des idées exerce, notamment dans le cas que nous examinons, sur le souvenir? cette question peut paraître oiseuse, tant la mémoire a été l'objet d'analyses nombreuses et variées de la part des psychologistes. Cependant, puisqu'on n'a pas songé à chercher dans les conditions générales de la mémoire la cause de cet oubli remarquable, qui cache communément les phénomènes du somnambulisme à l'état de veille, je puis supposer que tout n'a pas été dit sur cette matière.

Tout en cherchant dans mon esprit une expression convenable, qui semblait me fuir, je viens d'ouvrir machinalement un ouvrage de phrénologie [1], où je rencontre cette phrase : « L'activité humaine » est une; elle n'est pas multiple, comme le veulent les phrénolo- » gistes, qui assimilent l'homme aux animaux. » Cette pensée se

[1] *Examen du système phrénologique*, par le docteur Cerise.

rapporte à mon sujet, et je puis la prendre pour point de départ. L'activité humaine est une sans doute, ainsi que celle des animaux et de tout ce qui est vivant et organisé; mais je nie qu'elle ne soit pas multiple : elle est à la fois une et multiple [1]; sans cette condition, l'acte le plus simple de l'âme ne serait pas possible, et la différence qui sépare l'homme de l'animal n'est pas là.

J'éprouve par supposition un grand froid; mais mon âme n'est pas isolée, enfermée pour ainsi dire dans cette sensation. Je vois en même temps bien des objets qui m'entourent, je pense à une affaire qui m'intéresse, ou je cause avec quelqu'un, ou bien je me livre à quelque travail manuel, ou je vais quelque part, etc. Toutes ces idées existent dans mon esprit en même temps que cette sensation du froid, et sont quelquefois troublées par elle dans leur libre développement. Comment existent-elles simultanément dans le champ de ma conscience? à côté et en dehors l'une de l'autre, comme les meubles qui garnissent une chambre? ou bien comme les circonvolutions, les ganglions, les pédoncules, les tubercules et les ventricules du cerveau dans le crâne? Dans ce cas, le froid que j'éprouve ne gênerait pas le mouvement de mes idées, et mon âme pourrait d'une part se morfondre, tandis que de l'autre elle ferait tranquillement un traité sur l'irritation et la folie ou bien une Iliade. Dans ce cas encore, je pourrais dans dix ans ressentir le même froid qu'aujourd'hui, sans qu'à cette occasion les idées qui accompagnent aujourd'hui cette sensation se représentassent à mon esprit, en l'absence des objets qui les ont fait naître, comme je puis, par exemple, vous présenter les couches optiques (privées de vie, à la vérité,) sans la glande pinéale. Mais il n'en est pas ainsi : qu'un seul des éléments de ce tout varié se reproduise, et les autres seront donnés par celui-là, dans celui-là et en même temps que celui-là; quoique très-distincts entre eux, ils ne sont donc qu'un. Moi, par exemple, je n'éprouve jamais un froid d'une certaine intensité sans voir en imagination l'incendie qui consuma, par un froid

[1] Le sens que j'attache à cette expression se trouve développé par ce qui suit.

pareil, il y aura bientôt vingt ans, le palais des états-généraux à Bruxelles, ainsi que les principaux détails de la scène que j'eus alors sous les yeux. Et comme deux moments quelconques de la vie de l'âme pris isolément tiennent toujours ensemble par quelque élément qui leur est immédiatement ou médiatement commun, il faut admettre que l'âme, une fois qu'elle a posé le premier acte de son existence dans le temps, c'est-à-dire, dès la première sensation qu'elle a éprouvée, dès la première perception qu'elle a formée, dès la première réaction qu'elle a exercée, est toujours multiple en même temps qu'elle est une. Il y a plus; elle ne saurait rien de sa propre unité, si elle ne pouvait la vérifier dans la variété de ses états divers, soit successifs, soit simultanés. Unité et variété sont donc deux notions qui s'impliquent mutuellement. Voilà ce qu'atteste l'association des idées. Dans chaque moment de son existence, l'âme est multiple, elle est double, triple, quadruple, etc.; elle a plusieurs idées à la fois qu'elle compare entre elles; elle éprouve en même temps des sensations plus ou moins vives, des désirs qui peut-être se combattent; elle se voit dans le passé, dans le présent et dans l'avenir, et néanmoins elle est une : cette unité n'est pas un amalgame; ces divers états sont un, sans pour cela se confondre; ils sont d'autant plus distincts et mieux connus individuellement qu'ils sont plus un. Si l'âme était toujours une et rien qu'une, dans le sens d'une unité numérique et à l'exclusion de la variété, ou bien elle ne changerait jamais d'état, elle serait immobile et inerte; ou bien ses divers états ne communiqueraient pas ensemble, il n'y aurait pas d'association des idées, pas de souvenir, et l'âme en réalité ne serait rien moins qu'une.

On me pardonnera d'avoir rappelé ces détails élémentaires; ils renferment la solution de notre problème, et je demanderai de pouvoir en ajouter encore quelques-uns.

Je passe sous une fenêtre et des sons viennent frapper mon oreille; soudain j'éprouve une vive émotion : je pleure, ou je frémis, ou je m'élance comme pour saisir une proie. C'est que, dit-on, ces accents vous ont rappelé des circonstances remarquables de votre vie antérieure;

c'est un souvenir. Qu'est-ce à dire? j'entends chanter un air et je sais que je l'ai déjà entendu. Dans ce fait, il y a association du moment présent avec le passé; cet air existe deux fois dans mon esprit, non pas comme deux choses différentes, mais comme deux choses qui, bien que deux, n'en sont néanmoins qu'une. J'ai donc la conscience du fait actuel, du fait passé et de l'identité de ces deux faits. Voilà déjà les conditions de l'association des idées : l'unité dans la variété, l'âme à la fois une et multiple. Il y a ici ce que les psychologistes appellent simple souvenir. Mais cet air, en tant que passé, que je désignerai par *m*, a fait partie nécessairement d'un multiple, d'un groupe *mnop*.... dont les autres éléments (*nop*....) représentent certaines émotions vives, certaines actions ou certaines idées, qui, en vertu de l'unité de l'âme, sont maintenant reproduites en même temps que l'élément *m* qui les implique. C'est-là ce que les psychologistes appellent proprement association des idées.

Que faut-il maintenant pour que le moment présent se lie par le souvenir à un moment passé, ou bien pour qu'un état passé se reproduise en tant que passé? Il faut qu'un des éléments du multiple, du groupe *mnop*...., par exemple, dont l'âme a été jadis l'unité, soit actuellement reproduit dans l'âme à l'occasion d'un fait extérieur ou intérieur quelconque, et tel absolument qu'il a existé dans ce groupe. Pour me souvenir de l'élément *p*, il n'est pas nécessaire que précisément ce même élément *p* soit ainsi reproduit; il suffit que l'élément *m*, avec lequel il n'a fait qu'un, se reproduise tel qu'il a existé.

Constatons encore un autre fait, connu de tout le monde. Si l'on vous accusait inopinément d'être l'auteur d'un meurtre commis tel jour et à telle heure, et que l'on vous demandât où vous étiez et ce que vous faisiez dans ce moment-là, vous ne pourriez peut-être pas le dire dans l'instant même; mais vous vous en souviendrez, si on vous donne le temps de réfléchir. Si l'âme, qui est toujours multiple, l'était assez pour avoir toujours présente à elle-même la totalité des actes de sa vie passée, vous n'auriez pas besoin de réflexion pour savoir ce que vous avez fait tel jour et à telle heure, vous le *verriez*. Mais de

même que l'âme, soumise pour son développement à la loi du temps, n'a posé ces actes que successivement, bien qu'ils se rapportent à des choses extérieures qui peuvent coexister simultanément dans l'espace; de même elle ne peut se les représenter que successivement. Le pourquoi de ce fait appartient à la métaphysique. Cependant l'âme n'est pas exclusivement reléguée dans le temps de façon qu'elle ne puisse en aucune manière réaliser dans son développement les conditions de l'espace; nous savons qu'elle est multiple jusqu'à un certain degré, et que c'est là que se trouve la possibilité du souvenir. En effet, vous connaissez immédiatement votre état actuel. Cet état multiple renferme des éléments qui ont appartenu également à l'état, au groupe immédiatement antérieur, ne fût-ce, par exemple, que l'idée du lieu où vous vous trouvez et où vous vous êtes occupé successivement de plusieurs choses différentes. Vous pouvez ainsi remonter, en vertu de cette communauté d'éléments entre les scènes qui se sont succédé dans le champ de votre conscience, du moment présent au moment donné. Ou bien vous vous rappellerez une chose que vous avez certainement faite ce jour-là, et vous vous demanderez : qu'ai-je fait immédiatement avant ou immédiatement après? jusqu'à ce que vous arriviez au moment en question. Ce fait, que l'on a occasion de vérifier tous les jours, nous apprend, que dans le cours ordinaire des choses, l'âme ne passe pas *brusquement* d'un état donné A ($=mnop\ldots$) à un état X ($=\ldots uxyz$) n'ayant absolument rien de commun avec le précédent; mais que ce progrès se fait insensiblement, de façon que deux états ou groupes immédiatement successifs se tiennent toujours par quelques éléments communs.

Supposons, pour rendre la chose plus sensible, que dans un temps donné l'âme ait été le théâtre d'idées, de sensations, de désirs, de volitions divers représentés par la série :

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h.\ldots\ldots\ldots\ldots s,\ t,\ u,\ x,\ y,\ z.$$

Cette série, par les raisons rappelées plus haut, ne pourra pas former un seul groupe; mais elle se partagera entre plusieurs groupes A,

B, *C*, *D*, etc., comprenant chacun trois, quatre, cinq, etc., de ces éléments, de façon néanmoins qu'ils s'enchaînent entre eux par des éléments communs, ce que l'on pourra représenter ainsi :



Ces prémisses posées, passons aux applications. Admettons que contrairement à la marche ordinaire des choses, l'âme passe *immédiatement* d'un groupe donné $A = abcd...$ à un groupe $Y = stux...$ complétement étranger au précédent, et l'on comprendra qu'aussi longtemps que durera l'état *Y* elle ne pourra avoir aucun souvenir de l'état *A*, et que si plus tard aucun des éléments du groupe *A* n'a l'occasion de se reproduire tel qu'il a existé dans ce groupe, elle ne s'en souviendra jamais plus.

Voilà précisément ce qui arrive, lorsque dans l'état de veille on nous arrache *brusquement* soit à nos rêveries, soit à une méditation profonde. Nos sens étaient fermés au monde extérieur; nous ne voyions, nous n'entendions rien de ce qui nous entourait; notre âme était tout entière à des idées dont les objets étaient loin de nous, dans le passé ou dans l'avenir, ou bien à des idées qui ne se rapportaient à rien de matériel; en un mot, notre âme n'était associée à rien de ce qui était actuellement présent à nos sens extérieurs, à aucune impression sensible, à rien de ce qui constituait notre existence dans l'espace. Soudain une impression plus vive que les autres nous force de porter notre attention au dehors; l'objet qui a produit cette impression se présente à nous dans un cadre tout nouveau, celui de tous les objets qui par les sens font subitement invasion dans l'âme, et qui avaient été complétement inaperçus; aucun élément commun ne rattache l'un à l'autre ces deux états successifs de l'âme, ils sont séparés comme par un abîme, et il y a nécessairement oubli complet, parce que la condition fondamentale du souvenir, l'association des idées, n'existe pas; et celle-ci manque, parce qu'il y a eu assoupissement, involontaire ou volon-

taire, de nos sens externes. Ce sont en effet les impressions sensibles, reçues continuellement et sans le vouloir, qui, s'associant à tout ce que nous pensons, à tout ce que nous éprouvons, à tout ce que nous faisons, établissent entre les divers états de l'âme le lien ordinaire qui détermine le souvenir. Vous êtes, par exemple, assis dans votre chambre et vous vous levez pour vous rendre dans une autre partie de la maison, où se trouve une chose dont vous avez besoin. Chemin faisant, quelque autre objet que vous rencontrez inopinément, et qui est totalement étranger au premier, attire assez vivement votre attention, et arrivé où vous vouliez aller, vous ne savez plus pourquoi vous y êtes venu. Si ce n'est pas la première fois que pareille chose vous arrive, vous saurez que le seul moyen de vous en souvenir, c'est de retourner à votre point de départ, de vous replacer dans les circonstances matérielles où vous vous trouviez alors, et de vous rendre compte de tout ce qui vous environne. Le retour des impressions sensibles, associées involontairement de votre part à la cause pour laquelle vous vous êtes levé, suffira ordinairement pour vous la rappeler. Je dis ordinairement; car si l'objet qui vous a distrait chemin faisant vous a inspiré un intérêt vif, qui dure encore, ces impressions sensibles n'auront pas le pouvoir de se faire remarquer. Je reviendrai sur cette dernière observation.

Si cette transition *immédiate* d'un état de l'âme à un autre qui lui est complétement étranger, explique l'oubli profond qui peut envelopper, non-seulement nos rêveries de l'état de veille, mais encore nos pensées les plus réfléchies, elle expliquera à plus forte raison le complet oubli qui accompagne le réveil du somnambule, à l'égard de l'état dont il sort. Les sens du somnambule sont littéralement fermés au monde extérieur. Des expériences variées et nombreuses[1] ont fait voir que les organes de ses sens résistent à des impressions beaucoup plus fortes que celles qui les affectent et qui sont senties dans l'état de veille; ou pour mieux dire, c'est l'âme qui leur résiste, puisqu'après le réveil, le somnambule commence à sentir celles qui ont

[1] Voir les observations consignées dans les ouvrages cités plus haut, p. 9, note 2.

été assez vives pour que les traces matérielles n'en soient pas totalement effacées. Cependant, il a la conscience des objets extérieurs, qui sont en rapport avec les idées dont il s'occupe, et tel objet qu'on aura vainement fait agir sur ses sens avec une énergie extraordinaire, sera très-clairement aperçu de lui, dès que le cours de ses idées aura dirigé vers lui son attention. Il est donc tout entier à ce qu'il pense, à ce qu'il fait; il observe dans toute sa rigueur le précepte *age quod agis*, et nulle impression involontaire, comme il nous en arrive mille par jour dans l'état de veille, ne vient le distraire. On appelle communément les rêveurs et les penseurs des hommes distraits; ce sont les gens toujours éveillés qui méritent cette épithète, ce sont eux que leurs sens distraient continuellement de ce qui réclame toute leur attention.

Cet état d'isolement, cette absence de toute distraction, cette concentration de l'attention, expliquent, chez les somnambules, la rapidité des conceptions, la facilité des opérations intellectuelles et l'absence de toute hésitation dans les actions extérieures. Nos sens externes, sans lesquels le développement temporel de l'âme ne pourrait pas commencer, s'opposent, d'un autre côté, en faisant sans cesse avorter notre attention, en nous privant de notre liberté, à toute connaissance approfondie des choses. On sait que quand on s'est mis à son bureau pour se livrer à un travail intellectuel, on fait plus pendant la quatrième heure que pendant les trois premières réunies. C'est qu'il a fallu tout ce temps pour se recueillir, c'est-à-dire pour s'isoler, pour faire abstraction du monde extérieur, pour imposer silence à ses sens, et pour effacer complétement les mille et une sensations qui sont venues nous assaillir pendant toute la journée. Rappelez-vous un de ces moments de méditation profonde que j'ai indiqués plus haut; rappelez-vous avec quelle rapidité et quelle abondance les idées évoquées par mille souvenirs, par mille analogies inaperçues dans le chaos de votre existence matérielle, se sont pressées dans le champ de la conscience, au point que vous avez gourmandé la pesanteur de vos organes, qui ne vous permettait pas

de les fixer à mesure qu'elles se présentaient, et supposez que, dans un de ces moments, pour prolonger cette sorte d'inspiration ou d'intuition, vous ayez pu engourdir et dominer vos sens comme ils le sont dans le somnambulisme, et fermer les abords de votre âme aux impressions parasites du dehors ainsi qu'aux interpellations que les besoins du corps lui adressent périodiquement, et vous pourrez soupçonner les grandes choses dont l'âme consciente d'elle-même est capable, quant elle est parvenue à secouer la lourde chaîne de son organisation matérielle; vous concevrez en même temps la possibilité des merveilles que l'on raconte du somnambulisme.

Il sera maintenant superflu d'ajouter, que le somnambulisme forme avec l'état de veille un contraste beaucoup plus frappant, que celui qui existe entre ce même état de veille parfaite d'une part, et de l'autre nos rêveries et nos moments d'abstraction volontaire. Et de même que l'isolément du somnambule est plus profond, de même la transition immédiate devra être plus brusque, et s'opposer plus énergiquement à tout souvenir. Quand le somnambulisme se termine par une période plus ou moins longue de sommeil ordinaire, comme il arrive chez les somnambules spontanés, ce sommeil ne rend pas moins brusque la transition dont il s'agit, puisque, pendant ce sommeil, la personne qui dort ne se rend pas compte de ce qu'elle vient de faire comme somnambule. Quant au somnambule magnétique, lorsqu'il ne rentre pas immédiatement dans l'état de veille, son somnambulisme se termine, comme il a commencé, par une période plus ou moins longue de sommeil ordinaire [1].

[1] Sans association des idées, point de souvenir; voilà la loi que j'ai cherché à établir par les considérations qui précèdent; d'où il suit que tout souvenir doit pouvoir s'expliquer par quelque association d'idées. Un savant ami, dont les vastes connaissances m'ont été souvent d'un grand secours, et à qui j'ai fait part de mes vues sur cette question, m'a fait remarquer, que parfois certains souvenirs se présentent si soudainement à notre esprit, que malgré tous les efforts que nous faisons ensuite pour nous en rendre compte, le plus souvent nous n'y parvenons pas; qu'il y a donc des souvenirs que nous ne pouvons expliquer par l'association des idées. Le fait est incontestable, et je l'admets dans sa généralité, bien que l'inutilité de ces efforts s'explique bien souvent à mes yeux par l'intérêt que nous inspire l'objet de ces souvenirs, intérêt qui ne nous permet pas de nous replier à temps sur nous-mêmes. Mais aussi longtemps que ces mêmes

Il faut maintenant que je prévienne une objection qui se présentera certainement à tout esprit réfléchi. Tout en accordant ce que j'ai avancé sur l'isolement des somnambules, on observera que néanmoins ces derniers sont en rapport intime avec une partie des choses qui les entourent dans l'état de veille, et que la vue de ces objets, après leur réveil, devrait leur rappeler toute la scène dans laquelle ces mêmes objets sont intervenus pendant le sommeil lucide. Une domestique, par exemple, aura fait son ménage; un professeur de poésie aura fait des vers, qu'il retrouvera le lendemain écrits de sa main [1]. C'est ainsi, ajoutera-t-on, que le froid qu'il peut faire aujourd'hui, rappellera à un ancien militaire la campagne de Russie et sa captivité en Sibérie, quoique les autres circonstances associées à cette sensation puissent différer du tout au tout dans ces deux époques, et sans qu'il soit nécessaire, pour que ce souvenir ait lieu, de parcourir successivement dans l'esprit les états intermédiaires qui rattachent l'existence d'aujourd'hui à celle de ce temps-là.

Cette objection est spécieuse, et elle me fournit l'occasion de développer une loi de l'association des idées que, plus haut, je n'ai fait qu'indiquer. Remarquons d'abord qu'elle porte également sur des phénomènes de l'état de veille, sur les distractions. J'ai l'habitude de monter ma montre tous les soirs, quand je me dispose à me mettre au lit. Il m'est déjà arrivé plusieurs fois de vouloir la monter une seconde fois, ayant oublié que je l'avais déjà montée. Je connais votre explication; en la montant je pensais à autre chose. Sans doute; mais je

souvenirs involontaires n'auront pas été expliqués autrement que par l'association des idées, je serai autorisé à faire ce raisonnement-ci : Tous les souvenirs dont on peut de fait se rendre compte, s'expliquent par l'association des idées; donc cette même association des idées peut être considérée comme produisant aussi les souvenirs, dont jusqu'ici on n'a pu en aucune façon se rendre compte. Une personne qui a subi l'amputation d'un membre, éprouvera encore pendant longtemps des douleurs dans ce membre, qui n'existe plus. Ce phénomène a beaucoup exercé la sagacité des philosophes et même des physiologistes (voyez entre autres Richerand, § 152). Il ne s'explique d'une manière satisfaisante que par l'association des idées, quoique les personnes en qui il se produit ne se soient jamais rendu compte de cette association. Ce fait vient à l'appui de mon argumentation.

[1] Ab Heers, *Observat. oppido rurae*, cité par Fischer, *Deutsche Vierteljahrs-schrift*.

n'ai pas pu la monter sans la tirer de ma poche, ou la détacher du mur où elle pendait, sans par conséquent la voir, sans lui accorder mon attention, quelque faible qu'on la suppose à raison de l'habitude; je ne l'ai pas montée non plus sans voir la table de nuit sur laquelle je l'ai placée. Cette opération a donc été réellement associée à la pensée qui me préoccupait alors, que j'ai encore poursuivie après, et dont j'ai conservé le souvenir; elle a été également associée à l'idée de la montre que j'ai eue sous les yeux et de la table de nuit où je l'ai placée, idées qui se reproduisent au moment où je veux la monter de nouveau. Comment donc ne me souviens-je pas que la chose est déjà faite? Notons quelques autres circonstances de ce fait. Lorsque j'ai réellement monté ma montre, j'y ai sans doute fait quelque attention; mais cette attention a pu être infiniment plus faible que l'attention accordée à d'autres idées, à des réflexions, je suppose, qui n'étaient que la continuation d'une recherche intéressante, forcément interrompue par l'heure avancée de la nuit. Mais je continue à faire d'autres préparatifs, et ces distractions finissent par affaiblir graduellement l'intérêt attaché à cette recherche ou plutôt l'attention dont elle est l'objet; je vois alors ma montre sur ma table de nuit, et je me dis que je dois la monter. Il est encore évident ici, que l'idée de ces deux objets est alors beaucoup plus claire dans mon esprit moins préoccupé, qu'elle ne l'a été lorsque j'ai réellement monté la montre. Nous voilà sur la voie de l'explication.

L'âme, comme nous savons, est toujours une et multiple à la fois. Mais les divers éléments de ce multiple (idées diverses, sensations, volitions et désirs qui les accompagnent) n'ont pas nécessairement tous le même degré de clarté ou d'intensité, le même degré de développement, parce qu'ils ne sont pas l'objet de la même attention : deux ou trois d'entre eux pourront être plus intimement unis à la conscience, au *moi* qu'un quatrième, un cinquième, etc., et dans ce cas, ils seront aussi plus étroitement unis entre eux qu'avec ce quatrième, ce cinquième, et s'évoqueront plus facilement l'un l'autre qu'ils n'évoqueront le quatrième, le cinquième ou qu'ils ne seront évoqués par

eux. Le champ de la conscience n'est jamais également éclairé sur tous ses points. Les points qui ne le sont que faiblement, peuvent être considérés quelquefois comme ne s'y trouvant pas. Voilà ce qui explique le souvenir simple. Je rencontre en rue une figure que je me souviens d'avoir déjà vue, sans pouvoir me dire dans quelles circonstances. C'est une idée qui se reproduit en tant qu'ancienne, à l'occasion de l'objet qui jadis l'a fait naître, mais qui n'a pas le pouvoir de reproduire les autres éléments du groupe dont elle a fait partie. Ceux-ci à leur tour auront pu se reproduire depuis comme souvenir, sans rappeler la première. Je me suppose engagé dans une conversation très-animée avec une autre personne. Un ami vient à passer, et il se peut que tout en dirigeant vers lui mes yeux ouverts, je ne le voie pas, parce qu'il n'a aucun rapport avec les idées qui m'occupent, comme les somnambules n'ont aucune conscience des choses avec lesquelles ils ne sont pas en rapport. Ou bien, je le reconnais, je lui fais un signe, mais sans me laisser distraire sensiblement par ce nouvel objet. Quelque temps après, je revois cet ami et je me souviens de l'avoir vu récemment quelque part, mais sans pouvoir me dire où; je pourrai aussi m'être rappelé, depuis ce temps, ma conversation sans y associer l'idée de cet ami. Il en serait tout autrement si celui-ci, au lieu de passer rapidement, m'avait accosté et avait pris part à notre discussion. L'idée de cette personne aurait alors eu dans mon esprit le même degré de clarté que l'objet de la discussion lui-même. Il est encore certain, pour revenir au point de départ de l'objection à laquelle je réponds, que le froid que j'éprouverai aujourd'hui ne me rappellera pas la campagne de Russie ni la Sibérie, à moins qu'il ne soit très-vif ou que d'autres circonstances étrangères au froid, ne concourent à opérer cette reproduction. Nous ne nous souvenons jamais des premières années de notre enfance. L'explication de ce fait se trouve dans ce qui précède. Nos idées sont d'autant plus claires et plus distinctes que nous en avons davantage, et que par conséquent les points de comparaison sont plus nombreux. Les idées que nous formons aujourd'hui, et qui trouvent dans celles que nous possédons déjà un grand

nombre de points de comparaison ou de moyens de cognoscibilité, acquièrent donc beaucoup plus rapidement que dans les premiers temps de la vie, le degré de clarté convenable, et cette plus grande clarté relative, qui ne les quitte plus, est cause qu'elles ne reproduisent pas ces premières ébauches d'idées, ces idées à l'état de rudiment, bien qu'elles se rapportent à un grand nombre des mêmes objets [1]. Les premières années de la vie sont en quelque sorte la vie utérine de l'intelligence. Lorsque, par l'effet de circonstances extraordinaires, une idée a pu acquérir un plus grand degré de clarté, elle brille toute seule, comme un point lumineux, au milieu des ténèbres de ce premier âge. Le seul souvenir, par exemple, qui me reste des trois premières années de ma vie se rattache à l'explosion d'un magasin à poudre qui ébranla ma ville natale.

Nous conclurons de toutes ces observations, 1° que deux idées, relatives au même objet, ne s'évoqueront pas mutuellement, si elles diffèrent considérablement entre elles par la clarté dont elles sont revêtues, et 2° que si une idée qui se trouve conservée ou reproduite, ne reproduit pas en même temps tous les éléments du groupe dont elle a fait partie, cela tient uniquement à ce que l'attention a été fort inégalement partagée entre les divers éléments de ce groupe. Ce que je dis de la clarté des idées doit s'entendre aussi de la vivacité des sensations et des désirs, comme de l'énergie des volitions.

L'application au somnambulisme est facile à saisir. Si la clarté de nos idées dépend de l'attention que notre esprit accorde à leur objet, on comprendra qu'aucune idée de l'état de veille ne pourra jamais être aussi claire, à beaucoup près, que les idées du somnambulisme. Cette différence est la seule cause de l'oubli. En effet, rendez à ces idées leur ancienne clarté, concentrez-y toute l'attention dont l'esprit est capable, en supprimant toutes les distractions occasionnées par les sens ouverts au monde extérieur, c'est-à-dire en rétablissant les conditions du somnambulisme, et le souvenir se présentera. C'est pré-

[1] Voyez Stiedenroth, *Psychologie zur Erklärung der Seelenerscheinungen*, I, p. 53.

cisément ce qui a lieu; le somnambule se souvient parfaitement de tous les détails de ses accès précédents de somnambulisme. Il se souvient même d'une manière merveilleuse des époques les plus reculées de son existence de l'état de veille, et cela parce que les distrations sensibles de tous les instants qui voilent ces époques pour l'homme éveillé n'existent pas pour lui.

Tout me semble donc expliqué, en ce qui concerne l'oubli, par des lois que nous avons constatées, en analysant des faits qui appartiennent à l'état de veille lui-même; j'en ferai autant à l'égard du souvenir.

J'ai fait remarquer plus haut que l'on pouvait se souvenir parfaitement de ses rêveries. Il suffit pour cela de ne pas en sortir *brusquement*, mais de s'y reposer en quelque sorte, lorsqu'elles ont acquis un certain développement, et de s'en rendre compte, comme s'il s'agissait de les mettre par écrit. Cette récapitulation fait passer une seconde fois ces idées sous les yeux de la conscience, les impressions qu'elles nous laissent sont moins vives, parce qu'elles ne sont plus neuves; elles n'absorbent plus toute notre attention, que nous pouvons insensiblement reporter sur le monde réel qui nous entoure, et ces rêveries finissent par s'associer aux idées des choses extérieures, éveillées graduellement en nous par nos sens, dont les relations ordinaires avec l'âme se trouvent rétablies.

Si nous nous souvenons des idées qui sont le fruit de nos plus hautes abstractions volontaires, c'est pour ainsi dire par le même procédé. Il faut qu'avant de nous rendre complétement au monde extérieur, nous ayons pu parcourir au moins une seconde fois la série de ces idées, et que dans cet intervalle notre attention, moins enchaînée à ces idées, qu'il ne s'agit plus de produire mais seulement de constater, se reporte insensiblement sur les choses qui nous entourent : il faut que l'attention que jusqu'alors nous avons accordée à l'objet de nos idées ne cesse pas d'être volontaire, libre; il faut, par exemple, que notre esprit se dise qu'il a besoin de beaucoup d'attention pour ne pas perdre le fil de ses idées; ce qu'il ne peut se dire sans se rappeler en même temps qu'il existe des choses extérieures qui pourraient venir le

troubler, sans par conséquent leur accorder sciemment quelque attention , ne fût-ce que pour se mettre en garde contre toute interruption. Mais cette double attention, en se prolongeant pendant quelque temps, fait que les idées suscitées par l'action de nos sens s'associent par degrés à l'objet de nos méditations, et établissent un lien entre la veille intérieure et la veille extérieure.

En d'autres termes (et ce point de vue ira peut-être plus au fond de la question) : cet intervalle de récapitulation est un temps plus ou moins long, pendant lequel le rêveur ou bien le penseur cesse de rêver ou de méditer, sans cependant sortir de son rêve ni de sa méditation. Aussi longtemps qu'il a rêvé, qu'il a médité, son esprit, c'est-à-dire ses idées n'ont fait qu'un avec leur objet; il a été, comme on dit, *tout entier* à l'objet de ses idées; il a donc été *isolé* (de tout autre objet). Si une cause extérieure l'avait fait passer subitement à un objet tout différent, l'avait arraché subitement et complétement à son isolement, nous avons vu plus haut qu'il y aurait eu oubli à l'égard de son état précédent. Mais maintenant, grâce à sa nature d'homme, à sa liberté, il se détache lui-même de cet objet dans lequel il était isolé, non pas pour ne plus y penser du tout, mais pour reproduire librement les idées que cet objet a fait naître en lui, et se rendre compte ainsi de l'état où il se trouve. Qu'y a-t-il dans ce fait? il y a, que le sujet (rêvant, méditant), au lieu d'être captivé, dominé par l'objet, le domine à son tour, puisqu'il a su arrêter le développement des idées suscitées par cet objet, et qu'à son gré il les reproduit. Il n'est donc plus *isolé* (de tout autre objet), et les impressions reçues par ses sens ont retrouvé le chemin de son âme. Mais comme dans ce moment son activité intellectuelle est *libre*, ces impressions n'ont pas assez d'empire sur lui pour l'isoler à leur tour dans les objets qui les ont produites, pour détourner son attention de tout autre objet, pour l'empêcher par exemple, de se rendre compte de l'état où il vient de se trouver; elles existent donc dans son âme *en même temps* que les idées relatives à cet état. Voilà l'association et les conditions du souvenir.

Le somnambule ne se distingue de l'homme qui rêve les yeux ou-

verts, de l'homme distrait et du penseur plongé dans de profondes méditations, que par un isolement bien plus prononcé encore à l'égard des choses extérieures. Pour qu'il puisse y avoir association entre le somnambulisme et l'état de veille, il faut, par analogie avec ce qui précède, que l'isolement du somnambule cesse d'être complet, sans cependant que le somnambule soit complétement arraché à son état somnambulique, c'est-à-dire aux idées qui constituent cet état. Et pour cela, que faut-il? il faut, pour poursuivre notre analogie, de la part du somnambule un acte de liberté, un *je veux,* un acte par lequel, se détachant lui-même de l'objet de ses idées somnambuliques, il commande à ces idées en les reproduisant librement, en les plaçant en face de soi, pour s'en rendre compte. Cet acte de liberté sera beaucoup plus difficile chez le somnambule que chez le rêveur, par exemple, à raison même de son isolement, qui est beaucoup plus profond. Cela explique peut-être pourquoi le souvenir en question n'a pas encore été observé chez les somnambules spontanés, et pourquoi, chez les somnambules magnétiques, si l'on en juge par les faits connus jusqu'ici, il ne s'est produit spontanément qu'après avoir été produit une première fois à la suggestion du magnétiseur [1].

Remarquez donc que la condition du souvenir, c'est-à-dire l'association des idées, doit être posée *pendant* le somnambulisme lui-même. Cette condition se trouve-t-elle réalisée par le seul fait que le somnambule pense à l'état de veille, qu'il en parle, ou que, par les discours qu'on lui adresse, il est amené à y penser, à en parler? « L'action de la » pensée, dit Descartes [2], par laquelle on croit une chose, étant dif- » férente de celle par laquelle on connaît qu'on la croit, elles sont » souvent l'une sans l'autre. » Pendant que les idées et les actions du somnambule se forment et se développent naturellement, sa pensée est la pensée qui croit les choses, mais non la pensée qui connaît qu'elle les

[1] *Es gibt keine geborne Söhne der Freiheit,* dit quelque part Schelling; en d'autres termes, nul ne naît avec le plein usage de sa raison (de sa liberté); pour qu'elle entre en action, il faut un excitant extérieur, qui soit lui-même un être raisonnable ou libre.

[2] *Discours de la méthode,* 3me partie.

croit; il a la conscience de ces choses (des objets de ses idées ou de ses actions), il a donc aussi la conscience implicite de lui-même, puisque dans ce moment il n'existe que dans ces choses, il est tout entier à ces choses; mais il n'a pas la conscience explicite de lui-même, il est encore isolé dans les choses dont il s'occupe, isolé de toute autre chose; s'il pense à l'état de veille, cette idée elle-même est une idée entièrement somnambulique : il pense à l'état de veille, mais il *n'est pas* éveillé; donc point d'association entre le somnambulisme et l'état de veille.

Pour que cette association soit possible, il faut que l'isolement complet où se trouve le somnambule cesse, sans cependant que le somnambule soit complétement arraché à son état, c'est-à-dire à ses idées somnambuliques. Ce qui constitue cet isolement, c'est que certains objets ont seuls le pouvoir de fixer son attention, tandis que les abords de son âme sont fermés aux impressions faites sur ses sens par tout autre objet. Le somnambule se trouve donc dans un état de dépendance à l'égard de certains objets, dont son esprit a de la peine à se détacher. Cette dépendance, et par suite cet isolement, ne peut cesser que par un acte de liberté. Qui produira cet acte? l'esprit du somnambule n'est dans un état de dépendance, que parce qu'il s'abandonne passivement au courant des idées qui se développent pour ainsi dire d'elles-mêmes dans son commerce avec les choses extérieures. Il ne peut donc manifester sa liberté qu'en arrêtant ce mouvement de ses idées; et comme ce mouvement est le produit de son commerce, de son union intime avec les choses extérieures, en arrêtant ce mouvement, il se détache de l'objet de ces idées; enfin, comme son activité ultérieure ne peut plus consister à produire de nouvelles idées, puisqu'il a rompu avec leur objet, et puisqu'il est libre à l'égard de tout objet, elle ne pourra consister qu'à reproduire, avec la conscience explicite de lui-même, l'état où il vient de se trouver. Voilà ce qu'implique cet acte de liberté. Ce même acte réalise donc les conditions d'une association entre le somnambulisme et l'état de veille. En effet, le somnambule n'est pas hors du somnambulisme, cet état ne lui est pas devenu complétement étranger, puisqu'il s'en rend compte, puis-

qu'il le reproduit. Il n'est pas non plus enfermé pour ainsi dire dans le cercle magique de ses idées somnambuliques, puisqu'il leur commande, puisqu'il en a arrêté le développement, puisqu'il les fait renaître à son gré; il n'est donc plus complétement *isolé* (de tout autre objet), il n'est plus exclusivement somnambule. Il est donc éveillé et somnambule à la fois; ces deux états sont dans sa conscience comme un et comme distincts, c'est-à-dire ils sont associés. Cette association existe dès que le somnambule se dit : Je *veux* me souvenir de cette chose; en revanche, pour qu'elle existe, il faut que le somnambule *veuille*, qu'il soit libre, qu'il soit en position de se rendre compte de lui-même [1]. Or, le somnambule, répétons-le, peut fort bien penser à l'état de veille, sans *vouloir* se souvenir, sans même être capable de cette volonté, parce que les objets de ses idées l'intéressent trop vivement et paralysent sa liberté : il ne peut s'en détacher, et il ne sera probablement pas le premier à y songer; il faut qu'on lui en suggère l'idée, en lui demandant s'il ne veut pas se souvenir de telle ou telle chose. Cette question réveille en lui la conscience de sa liberté, elle le rend libre, et en lui parlant des moyens à employer pour assurer le souvenir on prolonge cet état de liberté. Cela fait, il se laisse entraîner de nouveau par le mouvement de sa vie somnambulique. Mais il a fait l'expérience de sa liberté, et cette expérience n'est pas perdue; il la renouvellera désormais à l'insçu de son magnétiseur, ainsi que le prouvent les faits cités plus haut.

[1] On trouvera peut-être que mon argumentation prouve trop. S'il est nécessaire, dira-t-on, que le somnambule se rende compte de lui-même pour pouvoir se souvenir, il faudrait qu'il en fût de même dans l'état de veille. Or il est notoire, que dans l'état de veille, nous nous souvenons parfaitement des idées que nous avons eues, quand même nous ne nous en sommes pas rendu compte immédiatement après leur production; pourquoi donc cette nécessité existerait-elle pour le somnambule? La solution de cette difficulté se trouve dans ce qui précède. Cette nécessité n'en est une pour le somnambule qu'à cause de l'*isolement* profond où il se trouve, et qui est généralement inconnu dans l'état de veille (externe), qui n'est au fond qu'un état de distraction. Faites naître dans l'état de veille un isolément, je ne dis pas égal à celui du somnambule, mais un isolément qui en approche seulement de loin, comme celui du rêveur et du penseur absorbé dans ses méditations, et vous ne pourrez vous souvenir plus tard de cet état, qu'à condition de vous en rendre compte avant d'en sortir complétement. Je crois avoir montré cela plus haut.

Examinons de nouveau ces faits. Le somnambule fera un nœud dans son mouchoir pour se souvenir de certaine chose. Ce nœud provoquera-t-il le souvenir par sa propre vertu, et par la seule circonstance qu'il a été fait pendant le somnambulisme, pendant que le somnambule pensait à cette chose? Cela n'est pas probable. Pourquoi en effet le somnambule ne se souvient-il de rien, quand le matin il trouve sur sa table la feuille de papier qu'il a remplie de vers de sa propre composition, pendant son état somnambulique? Si ces *memento* ont la vertu d'associer le somnambulisme à l'état de veille subséquent, c'est donc uniquement parce que, dans le moment où le somnambule les a faits, il a *voulu* se souvenir, c'est-à-dire parce que dans ce moment il n'était pas complétement somnambule [1]. Aussi est-il des somnambules qui se souviennent sans faire de *memento,* uniquement parce qu'ils ont voulu se souvenir, parce qu'en pensant à l'état de veille futur ils étaient réellement éveillés [2].

Il y a donc souvenir pour le somnambule, quand il y a association des idées entre le somnambulisme et l'état de veille, et les conditions de cette association sont absolument les mêmes que pour deux états quelconques de la veille elle-même.

Ici se termine la tâche que je me suis imposée : elle consistait à

[1] On me donne, je suppose, dans l'état de veille, une commission, et on me recommande de ne pas l'oublier. Tout en pensant à autre chose, je le promets et je fais un nœud dans mon mouchoir : quelques heures après je vois ce nœud et je ne sais plus pourquoi il est là. Je l'ai oublié, parce qu'en faisant le nœud j'étais distrait, c'est-à-dire que j'étais isolé jusqu'à un certain point dans un autre objet. Mais cet isolement est infiniment moindre que ne le serait celui du somnambule, si au moment où il *veut* se souvenir, il pouvait encore être complétement somnambule. Donc il ne l'est pas, et s'il ne l'est pas, il est jusqu'à un certain point éveillé.

[2] C'est ainsi que moi-même, en montant ma montre le lendemain du jour où j'ai eu la distraction dont j'ai parlé tout à l'heure, je m'adresse toujours ces paroles : je me souviendrai tantôt que cette montre est montée, et en effet je ne l'oublie pas. Mais en disant cela je ne fais qu'associer mon action présente à une action ou à un état à venir, que je réalise en moi par la pensée. Ainsi encore, quand je veux ne pas oublier une chose que je dois faire plus tard, comme d'emporter, en sortant, tel livre ou tel papier, je me recommande bien cette action mentalement; mais ce n'est pas tout : dans le même moment je me vois tel que je serai au moment de sortir, debout, habillé, le chapeau sur la tête, me dirigeant vers la porte et tenant l'objet en question à la main.



expliquer par des lois connues un phénomène, considéré jusqu'ici comme très-extraordinaire. Je crois l'avoir examiné sous toutes ses faces, et lui avoir fait perdre beaucoup de son étrangeté. En faisant ainsi rentrer un des phénomènes que présente le somnambulisme dans le cadre des phénomènes connus et compris de tout le monde, j'aurai sans doute considérablement rapproché le somnambulisme dans son entier, du cercle des faits qui nous sont familiers, et que, pour cette raison, nous croyons parfaitement comprendre. Le point le plus important à mes yeux, est d'avoir pu écarter toutes les hypothèses que j'ai analysées dans la première partie de ce travail, et parmi lesquelles la moins inadmissible n'est pas assurément celle des deux *moi*. Broussais, qui ne voulait pas qu'il y eût dans l'homme un seul *moi*, à titre d'entité surajoutée à la substance nerveuse, s'est naturellement élevé avec beaucoup de force, à propos du mémoire de Biran, contre l'admission de deux entités de ce genre [1]. Cette protestation part d'un instinct très-vrai, mais qui, s'ignorant lui-même, n'a conduit qu'au matérialisme.

[1] *Mémoire sur l'association*, etc., p. 188.

FIN.

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME XV.

MÉMOIRES COURONNÉS.

MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS.

